

Math. P 190 lm

Grunert

302

E l e m e n t e
der
D i f f e r e n t i a l -
und
I n t e g r a l r e c h n u n g

zum
Gebrauche bei Vorlesungen

von

Johann August Grunert

Doctor der Philosophie und ordentlichem Professor der Mathematik an der
Universität zu Greifswald, Ehrenmitgliede der Königl. Preuss. Akademie
der Wissenschaft zu Erfurt.

E r s t e r T h e i l.

Differentialrechnung.

Mit zwei Figurentafeln.

Leipzig, 1837.

Bei E. B. Schwickert.

E l e m e n t e

der

Differential-

BIBLIOTHECA

REGIA

Mathematica

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Gebrauch bei Vorlesungen

von

Johann August Grunert

Doctor der Philosophie und ordentlichem Professor der Mathematik an der
Universität zu Gießen, Mitglied der Königl. Preuss. Akademie
der Wissenschaften zu Berlin.

Erster Theil

Differentialrechnung

Mit zwei Figurentafeln.

Leipzig, 1837.

Bei E. B. Schwickert

Vorrede.

Im vorigen Jahre ward ich von dem Herrn Professor v. Schmöger in Regensburg zur Herausgabe eines Lehrbuchs der Differential- und Integralrechnung aufgefordert, welches auf den Königlich baierischen und andern Lehranstalten bei dem Unterrichte in diesen Wissenschaften zum Grunde gelegt werden könnte, und nahm um so weniger Anstand, diesem mit so vielem für mich höchst ehrenvollen Vertrauen gegen mich ausgesprochenen Wunsche nachzukommen, je lebhafter ich schon längst bei meinen eignen Vorlesungen den Mangel eines brauchbaren, dem neuesten Zustande der Wissenschaft gemäss bearbeiteten Lehrbuchs der sogenannten höhern Analysis gefühlt hatte. Seiner Bestimmung nach sollte dasselbe, wie auch schon der Titel besagt, keine vollständige Darstellung der Differential- und Integralrechnung liefern, sondern, mit Einschluss der wichtigsten Anwendungen auf die Geometrie, bloss die Elemente der beiden genannten Wissenschaften betreffen. Deshalb habe ich mir namentlich in der Integralrechnung ziemlich enge Grenzen stecken, und mich fast bloss mit der Integration der völlig entwickelten Differentiale mit einer veränderlichen Grösse begnügen

müssen, obgleich die Integration der Differentiale mit mehrern veränderlichen Grössen und der Differentialgleichungen nicht ganz übergangen, und auch Einiges über die so wichtige Theorie der bestimmten Integrale beigebracht worden ist. Das beste Exempelbuch zu diesem zweiten Theile des vorliegenden Lehrbuchs sind die bis jetzt noch unübertroffenen Integraltafeln von Meier Hirsch, die deshalb auch in den Händen keines Lehrers fehlen sollten. In der Differentialrechnung habe ich mir etwas grössere Ausführlichkeit erlauben zu dürfen geglaubt. Ueber die Art der Darstellung der viel besprochenen Grundprincipien dieser wichtigen mathematischen Doctrin konnte bei mir kein Zweifel seyn. Wer die trefflichen Untersuchungen Cauchy's und Crelle's über den sogenannten Rest der Taylor'schen und Maclaurin'schen Reihe kennt, und zu beurtheilen versteht, welcher überaus wichtige und einflussreiche Fortschritt durch dieselben in neuester Zeit in der mathematischen Analysis gemacht worden ist, wird mit mir gewiss die feste Ueberzeugung theilen, dass keine andere als die sogenannte Gränzenmethode geeignet ist, das herrliche Gebäude der Differentialrechnung und mathematischen Analysis überhaupt mit einem völlig sichern und unwandelbaren Fundamente zu versehen. Die sorgfältigste Darstellung der Sätze über den Rest der Taylor'schen und Maclaurin'schen Reihe, und die damit unmittelbar zusammenhängende Beurtheilung der Convergenz und Divergenz der Reihen in jedem einzelnen Falle, die bei dem gegenwärtigen Zustande der Analysis nie mehr erlassen werden kann, habe ich mir daher in diesem Buche, in dem man auch manche andere Eigenthümlichkeiten nicht unbemerkt lassen wird, zu einer ganz besondern Aufgabe gemacht. Eben so ist auch der Darstellung der Lehre von den Maximis und Minimis, von

den unbestimmt zu seyn scheinenden Werthen der Functionen, von der Differentiation der imaginären Functionen, so weit diese Lehren in eine bloss elementare Darstellung gehören, besondere Aufmerksamkeit gewidmet, ein möglichst reicher Vorrath von Uebungsbeispielen beigegeben, und auch auf praktische Anwendungen, die sich von der Differentialrechnung machen lassen, wie z. B. bei der sogenannten Fehlerrechnung für ebene und sphärische Dreiecke, Rücksicht genommen worden. Alle diese Gegenstände denke ich aber bald in einem aus zwei starken Bänden bestehenden Werke über die Differentialrechnung und deren Anwendung auf die Theorie der krummen Linien und krummen Flächen, dessen erster Theil schon vollständig ausgearbeitet vor mir liegt, ausführlicher und erschöpfender bearbeitet dem Publicum vorlegen zu können, wenn das vorliegende Elementarwerk sich einer günstigen Aufnahme erfreuen sollte.

Als ich an Herrn Professor v. Schmöger, der mir auch mit sehr zuvorkommender Bereitwilligkeit, die ich hier dankbar anzuerkennen mich verpflichtet fühle, seine eignen Hefte, aus denen ich namentlich einige zweckmässige Beispiele entlehnt habe, mitgetheilt hat, die Anfrage gerichtet hatte, ob nicht vielleicht besondere Vorschriften für die Ertheilung des Unterrichts in der Differential- und Integralrechnung auf den Königlich baierischen Lehranstalten existirten, antwortete mir dieser achtungswerthe Gelehrte:

dass die Allerhöchste Verordnung nichts weiter bestimme, als dass der mathematische Unterricht mit grösster Gründlichkeit und nach gedruckten Lehrbüchern zu ertheilen sey.

Wie viele Weisheit in dieser Allerhöchsten Verordnung liegt, mit wie grosser Kenntniss des Wesens

des mathematischen Unterrichts dieselbe gegeben ist, übersieht jeder erfahrene Lehrer der Mathematik auf den ersten Blick. Mir hat der erste Theil derselben bei der Bearbeitung dieses Lehrbuchs stets als Endzweck und letztes Ziel meiner Bestrebungen vorgeschwebt, und gewiss würde es mir zur grössten Freude gereichen, wenn mir von Kennern das Zeugniß, nicht zu weit von demselben entfernt geblieben zu seyn, zu Theil werden sollte.

Greifswald, im September 1836.

Der Verfasser.

Dreizehntes Kapitel. Einige der wichtigsten Anwendungen der Differentialrechnung auf die Theorie der in einer Ebene liegenden Curven oder der sogenannten Curven von einer

244 oder Krümmung.
 244 A. Tangenten der Curven.
 256 B. Allgemeine Theorie der Berührungen. Krümmungskreis.
 C. Concurrenz und Convergiren der Curven. Wendungspunkte

270 und Krümmungskreis.
 283 D. Evolution oder Abwicklung der Curven

Inhalt des ersten Theils.

Vierzehntes Kapitel. Differentialformeln für ebene und
 292 sphärische Dreiecke.
 302 A. Differentialformeln für ebene Dreiecke.

Differentialrechnung.

Seite

Erstes Kapitel. Allgemeine Begriffe von den Functionen. .	1
Zweites Kapitel. Von den Differenzen der Functionen. .	8
Drittes Kapitel. Von den Differentialen der Functionen mit einer veränderlichen Grösse.	36
Viertes Kapitel. Von den höhern Differentialen der Functionen mit einer veränderlichen Grösse.	104
Fünftes Kapitel. Der Maclaurin'sche und Taylor'sche Lehrsatz für Functionen mit einer veränderlichen Grösse. . .	116
Sechstes Kapitel. Entwicklung der Functionen in Reihen mittelst des Maclaurin'schen Satzes.	136
Siebentes Kapitel. Von der Differentiation der Functionen mit mehreren von einander unabhängigen veränderlichen Grössen.	161
Achtes Kapitel. Der Taylor'sche und Maclaurin'sche Satz für Functionen mit mehrern veränderlichen Grössen.	183
Neuntes Kapitel. Von der Differentiation der unentwickelten Functionen oder der Gleichungen.	188
Zehntes Kapitel. Von der Bestimmung der in gewissen Fällen unbestimmt zu seyn scheinenden Werthe der reellen Functionen mit einer veränderlichen Grösse.	195
Elftes Kapitel. Von den grössten und kleinsten Werthen der Functionen.	202
Zwölftes Kapitel. Von der Verwechslung oder Vertauschung der unabhängigen veränderlichen Grösse.	239

Dreizehntes Kapitel. Einige der wichtigsten Anwendungen der Differentialrechnung auf die Theorie der in einer Ebene liegenden Curven oder der sogenannten Curven von einfacher Krümmung.	244
A. Tangenten der Curven.	244
B. Allgemeine Theorie der Berührungen. Krümmungskreis.	256
C. Concavität und Convexität der Curven. Wendungspunkte und Spitzen. Nachtrag zur Lehre vom Krümmungskreise.	270
D. Evolution oder Abwicklung der Curven	283

Vierzehntes Kapitel. Differentialformeln für ebene und sphärische Dreiecke.	292
A. Differentialformeln für ebene Dreiecke.	296
B. Differentialformeln für sphärische Dreiecke.	305

Erstes Kapitel. Allgemeine Begriffe von den Functionen.	1
Zweites Kapitel. Von den Differenzen der Functionen.	2
Drittes Kapitel. Von den Differentialen der Functionen mit einer veränderlichen Grösse.	36
Viertes Kapitel. Von den höheren Differentialen der Functionen mit einer veränderlichen Grösse.	104
Fünftes Kapitel. Der Maclaurin'sche und Taylor'sche Lehrsatz für Functionen mit einer veränderlichen Grösse.	116
Sechstes Kapitel. Entwicklung der Functionen in Reihen mittelst des Maclaurin'schen Satzes.	130
Siebentes Kapitel. Von der Differentiation der Functionen mit mehreren von einander unabhängigen veränderlichen Grössen.	161
Achstes Kapitel. Der Taylor'sche und Maclaurin'sche Satz für Functionen mit mehreren veränderlichen Grössen.	183
Neuntes Kapitel. Von der Differentiation der unentwickelten Functionen oder der Gleichungen.	188
Zehntes Kapitel. Von der Bestimmung der in gewissen Fällen unbestimmt zu sein scheinenden Werthe der reellen Functionen mit einer veränderlichen Grösse.	195
Elftes Kapitel. Von den grössten und kleinsten Werthen der Functionen.	202
Zwölftes Kapitel. Von der Verwechslung oder Veranschauung der unabhängigen veränderlichen Grösse.	239

Erstes Kapitel

Allgemeine Begriffe von den Functionen.

Differentialrechnung.

Man unterscheidet zwei Arten von Functionen, die in der
Differentialrechnung vorkommen. Entweder betrachtet man eine
Function, die von einer einzigen Veränderlichen abhängt, oder
eine Function, die von mehreren Veränderlichen abhängt. In
beiden Fällen ist die Function eine Abbildung eines gewissen
Gebietes in ein anderes. Das Gebiet, aus dem die Function
abgebildet wird, ist das Gebiet der unabhängigen Veränderlichen,
das Gebiet, in das die Function abgebildet wird, ist das Gebiet
der abhängigen Veränderlichen. Die Function selbst ist die
Abbildung, die jedem Element des ersten Gebietes ein Element
des zweiten Gebietes zuordnet. Man kann sich die Function
als eine Maschine vorstellen, die in das erste Gebiet ein Element
einwirft und aus dem zweiten Gebiet ein Element herausgibt.
Die Function ist also eine Abbildung, die das erste Gebiet
mit dem zweiten Gebiet verbindet.

Man unterscheidet ferner zwei Arten von Functionen, die
in der Differentialrechnung vorkommen. Entweder betrachtet
man eine Function, die von einer einzigen Veränderlichen
abhängt, oder eine Function, die von mehreren Veränderlichen
abhängt. In beiden Fällen ist die Function eine Abbildung
eines gewissen Gebietes in ein anderes. Das Gebiet, aus dem
die Function abgebildet wird, ist das Gebiet der unabhängigen
Veränderlichen, das Gebiet, in das die Function abgebildet
wird, ist das Gebiet der abhängigen Veränderlichen. Die
Function selbst ist die Abbildung, die jedem Element des
ersten Gebietes ein Element des zweiten Gebietes zuordnet.

Man unterscheidet ferner zwei Arten von Functionen, die
in der Differentialrechnung vorkommen. Entweder betrachtet
man eine Function, die von einer einzigen Veränderlichen
abhängt, oder eine Function, die von mehreren Veränderlichen
abhängt. In beiden Fällen ist die Function eine Abbildung
eines gewissen Gebietes in ein anderes. Das Gebiet, aus dem
die Function abgebildet wird, ist das Gebiet der unabhängigen
Veränderlichen, das Gebiet, in das die Function abgebildet
wird, ist das Gebiet der abhängigen Veränderlichen. Die
Function selbst ist die Abbildung, die jedem Element des
ersten Gebietes ein Element des zweiten Gebietes zuordnet.

Differentialrechnung.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Begriffe von den Functionen.

§. 1.

In der Differentialrechnung, so wie in der mathematischen Analysis, von welcher die Differentialrechnung ein Theil ist, überhaupt, unterscheidet man zwei Arten von Grössen, oder betrachtet vielmehr alle Grössen aus zwei wesentlich von einander verschiedenen Gesichtspunkten. Entweder betrachtet man nämlich eine Grösse aus einem solchen Gesichtspunkte, dass dieselbe beständig ein und denselben völlig bestimmten Werth behalten, den ihr ein für alle Mal beigelegten Werth nie ändern soll; oder man legt dieser Grösse überhaupt keinen bestimmten Werth bei, sondern betrachtet dieselbe aus einem solchen Gesichtspunkte, dass ihr jeder beliebige Werth beigelegt werden, sie ihren Werth auf jede beliebige Weise ändern kann. Grössen der ersten Art heissen beständige oder constante Grössen, und werden gewöhnlich durch die ersten Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets bezeichnet; Grössen der zweiten Art nennt man dagegen veränderliche oder variable Grössen, und bezeichnet dieselben gewöhnlich durch die letzten Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets, meistens durch $x, y, z, t, v, u, \dots$

§. 2.

Jede von einer oder einigen veränderlichen Grössen abhängende Grösse, deren Werth also durch die, den in Rede stehenden veränderlichen Grössen beigelegten Werthe bestimmt wird, und sich mit diesen Werthen zugleich verändert, folglich jeder aus beliebigen constanten und einer oder einigen veränderlichen Grössen mittelst beliebiger analytischer Operationen zusammengesetzte analytische Ausdruck heisst eine Function dieser veränderlichen Grössen.

Der Ausdruck

$$ax + b\sqrt{a^2 - y^2}$$

ist z. B. eine Function der beiden veränderlichen Grössen x und y ; $\sin x$ ist eine Function des veränderlichen Bogens x ; die Peripherie und Fläche eines Kreises sind Functionen seines Halbmessers.

Jede Function ist, wie aus dem obigen allgemeinen Begriffe sich auf der Stelle ergibt, selbst eine veränderliche Grösse; aber nicht eine veränderliche Grösse, der man jeden beliebigen Werth beilegen kann, sondern eine veränderliche Grösse, deren Werth durch die Werthe der veränderlichen Grössen, von denen die Function abhängt, bestimmt wird, weshalb man Functionen auch häufig abhängige veränderliche Grössen nennt, im Gegensatz der unabhängigen veränderlichen Grössen oder veränderlichen Grössen schlechthin, denen jeder beliebige Werth beigelegt werden kann.

Ein analytischer Ausdruck, dessen Werth sich nicht mit den Werthen der in ihm enthaltenen veränderlichen Grössen zugleich ändert, ist nur scheinbar eine Function dieser veränderlichen Grössen, und wird sich immer so umformen lassen, dass er, nachdem alle in ihm vorkommenden veränderlichen Grössen sich gegenseitig aufgehoben haben, bloss noch constante Grössen enthält, also natürlich selbst eine constante Grösse ist. So ist z. B. der Ausdruck

$$\frac{a(x^2 - a^2)}{b(x - a)(x + a)}$$

nur scheinbar eine Function von x , indem sich derselbe, weil

$$(x - a)(x + a) = x^2 - a^2$$

ist, sehr leicht auf den constanten Bruch $\frac{a}{b}$ zurückführen lässt.

§. 3.

Jenachdem eine Function nur von einer, oder von zwei, drei, vier, fünf u. s. w. veränderlichen Grössen abhängt, heisst sie respective eine Function von einer oder von zwei, drei, vier, fünf u. s. w. veränderlichen Grössen. Functionen, bei denen man die Anzahl der veränderlichen Grössen, von denen sie abhängen, unbestimmt lässt, heissen überhaupt Functionen mehrerer veränderlicher Grössen.

Um im Allgemeinen Functionen gewisser veränderlicher Grössen zu bezeichnen, bedient man sich der Zeichen F , f , φ , ψ oder ähnlicher, indem man diesen Zeichen die Symbole der veränderlichen Grössen, von denen die Function abhängig gedacht wird, in Parenthesen eingeschlossen, auf der rechten Seite beifügt, so dass also hiernach

$$F(x), f(x), \varphi(x), \psi(x)$$

Functionen von x , und eben so

$$F(x, y, z, \dots), f(x, y, z, \dots), \varphi(x, y, z, \dots), \psi(x, y, z, \dots)$$

Functionen von $x, y, z, \dots$ bezeichnen, deren Form übrigens ganz unbestimmt gelassen wird. Die Buchstaben F , f , φ , ψ und andere heissen, wenn der eben besprochene Gebrauch von ihnen gemacht wird, Functionszeichen. Functionen, die man rücksichtlich ihrer Form als verschieden betrachtet, müssen

jederzeit auch durch verschiedene Functionszeichen bezeichnet werden.

§. 4.

Alle analytischen Operationen pflegt man in zwei Klassen zu theilen. Die Addition, Subtraction, Multiplication, Division und das Potenziren, worunter bekanntlich auch das Wurzelausziehen enthalten ist, heissen, in so fern bei dem Potenziren der Potenzexponent nicht als variabel, sondern als constant betrachtet wird, algebraische Operationen; alle übrigen analytischen Operationen, die nicht unter den genannten enthalten sind, heissen transcendente Operationen.

Alle Functionen, in denen sämtliche veränderliche Grössen bloss algebraischen Operationen unterworfen sind, heissen algebraische Functionen; jede Function dagegen, in welcher irgend eine veränderliche Grösse einer transcendenten Operation unterworfen ist, heisst eine in Bezug auf diese veränderliche Grösse transcendente Function, woraus also hervorgeht, dass Functionen mehrerer veränderlicher Grössen in Bezug auf gewisse der in ihnen enthaltenen veränderlichen Grössen algebraische, in Bezug auf andere der in ihnen enthaltenen veränderlichen Grössen dagegen transcendente Functionen seyn können.

Die einfachen transcendenten Functionen einer veränderlichen Grösse, welche wir im Folgenden vorzüglich einer sorgfältigen Untersuchung unterwerfen werden, sind die folgenden vier:

$$a^x, \log x, \sin x, \text{Arc sin } x.$$

Die transcendenten Functionen von der ersten Form, nämlich Potenzen mit veränderlichen Exponenten, werden auch Exponentialgrössen genannt. $\log x$ mag im Folgenden immer den Logarithmus der veränderlichen Grösse x für die beliebige Basis b bezeichnen. $\sin x$ bezeichnet bekanntlich den Sinus des veränderlichen Bogens x in einem Kreise, dessen Halbmesser die Einheit ist. $\text{Arc sin } x$, oder, nach der Schreibart der meisten neuern französischen Geometer, $\text{Arc sin}(=x)$, bezeichnet einen Kreisbogen, dessen Sinus die veränderliche Grösse x ist, in einem mit der Einheit als Radius beschriebenen Kreise.

Zu der Klasse der transcendenten Functionen gehören auch die Functionen $\cos x$, $\text{tang } x$, $\cot x$, $\sec x$, u. s. w. Jedoch sind diese Functionen keine einfachen Functionen, da sie sich bekanntlich sämtlich durch die Function $\sin x$ ausdrücken lassen. Die Bedeutung der Symbole $\text{Arc cos } x$, $\text{Arc tang } x$, $\text{Arc cot } x$, $\text{Arc sec } x$, oder $\text{Arc cos}(=x)$, $\text{Arc tang}(=x)$, $\text{Arc cot}(=x)$, $\text{Arc sec}(=x)$ und ähnlicher wird aus dem Obigen leicht ohne weitere Erläuterung erhellen. Auch alle die durch diese Symbole dargestellten Functionen gehören zu der Klasse der transcendenten Functionen; aber keine dieser Functionen ist eine einfache Function, indem sich z. B., wie leicht erhellen wird, die Function $\text{Arc tang } x$ auf die Form

$$\text{Arc sin } \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

bringen lässt.

Die oben angegebenen vier einfachen transcendenten Functionen sind diejenigen, auf welche sich alle transcendenten Functionen, die wir im Folgenden betrachten werden, zurückführen lassen.

§. 5.

Die algebraischen Functionen werden in rationale und irrationale algebraische Functionen eingetheilt. Eine rationale algebraische Function ist eine solche, welche nach gehöriger Reduction und Transformation auf eine solche Form gebracht werden kann, dass keine veränderliche Grösse unter einem Wurzelzeichen oder mit einem gebrochenen Exponenten behaftet vorkommt. Kommt aber eine der in der Function enthaltenen veränderlichen Grössen unter einem Wurzelzeichen oder mit einem gebrochenen Exponenten behaftet vor, und lässt sich auf keine Weise von diesem gebrochenen Exponenten befreien; so heisst die Function in Bezug auf die in Rede stehende veränderliche Grösse irrational.

So ist z. B.

$$\frac{x^4 - 4x^2y^2 + 7}{3a^2x^2 - y^2}$$

eine rationale algebraische Function der beiden veränderlichen Grössen x und y ; die Function

$$\frac{x^5 - 4\sqrt[n]{xy} + 3\sqrt[m]{y^3}}{4a\sqrt[n]{x} - \sqrt[m]{y}}$$

ist dagegen sowohl in Bezug auf x , als auch in Bezug auf y irrational; die Function

$$\frac{2x^3 - 4x^2\sqrt[3]{y} + 3y^2}{5x\sqrt[6]{y} - \sqrt[6]{y}}$$

ist nur in Bezug auf die veränderliche Grösse y irrational.

§. 6.

Die rationalen algebraischen Functionen werden in ganze und gebrochene rationale algebraische Functionen eingetheilt. Eine rationale algebraische Function der veränderlichen Grössen $x, y, z, \dots$, welche, indem $P, P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ beliebige von x ganz unabhängige Functionen von $y, z, \dots$ bezeichnen, von der allgemeinen Form

$$P + P_1x + P_2x^2 + P_3x^3 + \dots + P_nx^n$$

ist, oder wenigstens auf diese Form gebracht werden kann, heisst in Bezug auf die veränderliche Grösse x eine ganze rationale algebraische Function des n ten Grades.

Eine rationale algebraische Function von $x, y, z, \dots$, welche in Bezug auf jede ihrer veränderlichen Grössen auf eine der obigen ähnliche Form gebracht werden kann, heisst überhaupt eine ganze rationale algebraische Function ihrer veränderlichen Grössen $x, y, z, \dots$.

Jede rationale algebraische Function dagegen, welche in Bezug auf eine ihrer veränderlichen Grössen nicht auf eine der obigen ähnliche Form gebracht, und daher bloss in Form eines Bruchs dargestellt werden kann, in dessen Nenner die in Rede stehende veränderliche Grösse enthalten ist, heisst in Bezug auf diese veränderliche Grösse eine gebrochene rationale algebraische Function. So ist z. B. die Function

$$\frac{x^4 - 3a^2 x^2 y^2 + az^2 - bz + c}{4a^2 x^2 - b^2 y^2}$$

sowohl in Bezug auf x , als auch in Bezug auf y , eine gebrochene rationale algebraische Function, in Bezug auf z dagegen offenbar eine ganze rationale algebraische Function des zweiten Grades.

§. 7.

Jede Function, welche durch ihre veränderlichen Grössen unmittelbar in einem völlig entwickelten Ausdruck dargestellt ist, heisst eine entwickelte Function ihrer veränderlichen Grössen, wie z. B. die folgende Function z der beiden veränderlichen Grössen x und y :

$$z = \frac{a + bx}{\alpha + \beta y}.$$

Wenn dagegen zwischen einer Function und ihren veränderlichen Grössen bloss eine Gleichung, die man in Bezug auf die Function als unbekannte Grösse auflösen müsste, wenn man die Function durch ihre veränderlichen Grössen völlig entwickelt darstellen wollte, gegeben ist; so heisst die Function eine unentwickelte Function ihrer veränderlichen Grössen. Hat man z. B. zwischen x und y die Gleichung

$$a - bx^3 + cxy^2 - dx^2 y^3 = 0;$$

so ist kein Zweifel, dass y eine Function von x ist, da der Werth von y offenbar durch den Werth von x bestimmt wird. So lange aber die obige Gleichung in Bezug auf y als unbekannte Grösse nicht allgemein aufgelöst und y durch x und die constanten Grössen a, b, c, d in einem völlig entwickelten analytischen Ausdruck dargestellt ist, heisst y eine unentwickelte Function von x . Eben so ist, wenn zwischen x und φ die Gleichung

$$\varphi + x \sin \varphi = 0$$

gegeben ist, φ so lange eine unentwickelte Function von x , so lange diese Gleichung in Bezug auf φ als unbekannte Grösse nicht allgemein aufgelöst, und also φ nicht in einem völlig entwickelten analytischen Ausdruck durch x dargestellt ist.

§. 8.

Wenn der Werth $f(a)$, welchen die Function $f(x)$ von x für $x=a$ erhält, eine endliche reelle völlig bestimmte Grösse ist, und die Differenz

$$f(a \pm i) - f(a),$$

wo i eine beliebige positive Grösse bezeichnen soll, sich, wenn i sich der Null nähert, auch der Null immer mehr und mehr nähert, und der Null beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur i der Null nahe genug kommen lässt; so sagt man, dass die Function $f(x)$ für $x=a$, oder in der Nähe des bestimmten Werths a der veränderlichen Grösse x stetig oder continuirlich sey. Sind dagegen für $x=a$ die obigen Bedingungen nicht erfüllt; so sagt man, dass für $x=a$ eine Unterbrechung der Stetigkeit der Function $f(x)$ Statt finde. Wenn endlich die Function $f(x)$ für alle zwischen zwei bestimmten Gränzen liegende Werthe von x stetig ist, oder für keinen zwischen diesen Gränzen liegenden Werth von x eine Unterbrechung der Stetigkeit der Function $f(x)$ Statt findet; so sagt man, dass dieselbe zwischen den beiden in Rede stehenden Gränzen stetig oder continuirlich sey.

Für $x=0$ findet z. B. eine Unterbrechung der Stetigkeit der Function ax^{-1} Statt. Eben so findet überhaupt für $x = \pm \frac{1}{2}(2k+1)\pi$, wo k eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet, eine Unterbrechung der Stetigkeit der Function $\text{tang } x$ Statt.

Die Stetigkeit einer Function mehrerer veränderlicher Grössen lässt sich bloss in Bezug auf jede ihrer veränderlichen Grössen besonders beurtheilen, so dass also in dieser Beziehung etwas Weiteres dem Obigen hinzuzufügen nicht nöthig ist.

Zweites Kapitel.

Von den Differenzen der Functionen.

§. 9.

In der beliebigen Function

$$y = f(x)$$

der einen veränderlichen Grösse x lasse man sich diese Grösse um eine beliebige positive oder negative Grösse, die wir durch Δx bezeichnen wollen, verändern; so ist, wenn man den diesem veränderten Werthe $x + \Delta x$ der unabhängigen veränderlichen Grösse entsprechenden Werth der gegebenen Function durch $y^{(1)}$ bezeichnet,

$$y^{(1)} = f(x + \Delta x).$$

Zieht man nun von diesem veränderten Werthe der gegebenen Function den primitiven Werth derselben ab; so nennt man die Grösse

$$y^{(1)} - y = f(x + \Delta x) - f(x),$$

welche man auf diese Weise erhält, die Differenz der gegebenen Function, bezeichnet dieselbe durch Δy oder $\Delta f(x)$, und hat also immer in dieser Bezeichnung

$$\Delta y = y^{(1)} - y$$

oder

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x).$$

§. 10.

Um den wichtigen Begriff der Differenz einer Function mit einer veränderlichen Grösse an einigen Beispielen zu erläutern, sey

$$1. \quad y = ax^3;$$

so ist

$$y^{(1)} = a(x + \Delta x)^3,$$

und folglich

$$\Delta y = a \{ (x + \Delta x)^3 - x^3 \},$$

d. i. nach gehöriger Entwicklung der dritten Potenz von $x + \Delta x$

$$\Delta y = a(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2)\Delta x,$$

wobei wir bemerken, dass überhaupt Δx^n immer die n te Potenz von Δx bezeichnen soll. Dagegen soll die Differenz der Function x^n jederzeit durch $\Delta(x^n)$, oder, um die Parenthesen zu ersparen, bloss durch $\Delta \cdot x^n$ bezeichnet werden, indem wir überhaupt der Kürze wegen öfters Parenthesen durch hinter das Differenzenzeichen geschriebene Punkte ersetzen werden.

Ferner sey

$$2. \quad y = a \log x;$$

so ist

$$y^{(1)} = a \log(x + \Delta x)$$

und folglich

$$\Delta y = a \{ \log(x + \Delta x) - \log x \},$$

woraus, wenn man

$$x + \Delta x = x \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)$$

setzt, leicht

$$\Delta y = a \log \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)$$

erhalten wird.

Ist

$$3. \quad y = a^x$$

und folglich

$$y^{(1)} = a^{x + \Delta x};$$

so ist

$$\Delta y = a^{x + \Delta x} - a^x = a^x (a^{\Delta x} - 1).$$

Ist ferner

$$4. \quad y = \sin x;$$

so ist

$$y^{(1)} = \sin(x + \Delta x),$$

und folglich

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x,$$

woraus nach einer bekannten goniometrischen Formel leicht

$$\Delta y = 2 \sin \frac{1}{2} \Delta x \cos(x + \frac{1}{2} \Delta x)$$

erhalten wird.

Ist endlich

$$5. y = \cos x;$$

so ist

$$y^{(1)} = \cos(x + \Delta x),$$

und folglich

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x,$$

woraus sich nach einer bekannten goniometrischen Formel ferner

$$\Delta y = -2 \sin \frac{1}{2} \Delta x \sin(x + \frac{1}{2} \Delta x)$$

ergiebt.

Aehnliche Beispiele würden sich leicht mehrere geben lassen.

§. 11.

Von ganz vorzüglicher Wichtigkeit für das Folgende ist aber die allgemeine Entwicklung der Differenz der Function

$$y = x^n,$$

wo n eine positive ganze Zahl bezeichnen soll, in eine nach den positiven ganzen Potenzen von Δx fortschreitende Reihe.

Lässt man x sich um Δx verändern; so erhält man

$$y^{(1)} = (x + \Delta x)^n,$$

und folglich

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n,$$

oder

$$\Delta y = x^n \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^n - x^n.$$

Um also die Differenz Δy in eine nach den positiven ganzen Potenzen von Δx fortschreitende Reihe zu entwickeln, wird man bloss die Potenz

$$\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^n$$

in eine solche Reihe zu entwickeln haben. Diese Entwicklung wird aber offenbar gefunden seyn, wenn man die Potenz

$$(1 + x)^n$$

in eine nach den positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickeln kann, indem man in dieser Entwicklung, um die erstere Entwicklung zu erhalten, bloss $\frac{\Delta x}{x}$ für x zu setzen braucht. Also reducirt sich unsere Aufgabe auf die Entwicklung der Potenz

$$(1 + x)^n$$

in eine nach den positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe, welche wir daher zunächst zu finden suchen wollen.

Bevor wir aber zu dieser Entwicklung selbst übergehen können, müssen wir zuvörderst den folgenden für die Analysis überhaupt in vielfacher Beziehung wichtigen Satz beweisen.

§. 12.

Lehrsatz. Wenn, indem

$$A_0, A_1, A_2, A_3, \dots A_n;$$

$$B_0, B_1, B_2, B_3, \dots B_n$$

von x ganz unabhängige Grössen bezeichnen, für jedes x

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots + A_n x^n \\ = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \dots + B_n x^n$$

ist; so ist jederzeit

$$A_0 = B_0, A_1 = B_1, A_2 = B_2, \dots A_n = B_n.$$

Beweis. Weil nach der Voraussetzung für jedes x

$$1. \quad A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n \\ = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \dots + B_n x^n$$

ist; so erhält man, wenn man $x=0$ setzt, auf der Stelle

$$2. \quad A_0 = B_0.$$

Durch Subtraction der Gleichung 2. von der Gleichung 1. ergibt sich die ebenfalls für jedes x geltende Gleichung

$$3. \quad A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots + A_n x^n \\ = B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \dots + B_n x^n.$$

Dividirt man, vorausgesetzt, dass x nicht $= 0$ ist, auf beiden Seiten dieser Gleichung mit x ; so ergibt sich die für jedes x , welches nicht $= 0$ ist, geltende Gleichung

$$4. \quad A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + \dots + A_n x^{n-1} \\ = B_1 + B_2 x + B_3 x^2 + \dots + B_n x^{n-1}.$$

Lässt man nun aber x sich der Null nähern, so nähern sich die Grössen auf den beiden Seiten des Gleichheitszeichens in dieser Gleichung immer mehr und mehr respective den Grössen A_1 und B_1 als ihren Gränzen, und können denselben, wie sogleich erhellen wird, beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur x nahe genug bei Null nimmt. Weil aber die beiden in Rede stehenden Grössen für jedes nicht verschwindende x , wie nahe diese Grösse auch der Null kommen mag, einander gleich sind; so müssen sich dieselben, wenn x sich der Null nähert, offenbar denselben Gränzen nähern, und es ist also

$$5. \quad A_1 = B_1.$$

Folglich gilt die Gleichung 4. offenbar auch für $x=0$, also für jedes x .

Durch Subtraction der Gleichung 5. von der Gleichung 4. erhält man nun ferner die für jedes x geltende Gleichung

$$6. \quad A_2 x + A_3 x^2 + A_4 x^3 + \dots + A_n x^{n-1} \\ = B_2 x + B_3 x^2 + B_4 x^3 + \dots + B_n x^{n-1},$$

und aus dieser Gleichung folgt, wenn man, unter der Voraussetzung, dass x nicht $= 0$ ist, auf beiden Seiten mit x dividirt, die für jedes nicht verschwindende x geltende Gleichung

$$7. \quad A_2 + A_3 x + A_4 x^2 + \dots + A_n x^{n-2} \\ = B_2 + B_3 x + B_4 x^2 + \dots + B_n x^{n-2},$$

aus der sich dann ferner durch ein ganz ähnliches Raisonnement wie vorher

$$8. \quad A_2 = B_2$$

ergiebt, so dass also die Gleichung 7. auch für $x = 0$, folglich für jedes x gilt.

Wie man auf diese Art weiter schliessen kann, ist klar, und es ist also

$$A_0 = B_0, A_1 = B_1, A_2 = B_2, \dots, A_n = B_n,$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 13.

Zusatz. Wenn sich eine beliebige Function $f(x)$ von x für jedes x sowohl in die Reihe

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots + A_n x^n,$$

als auch in die Reihe

$$B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \dots + B_n x^n$$

entwickeln lässt; so ist jederzeit

$$A_0 = B_0, A_1 = B_1, A_2 = B_2, \dots, A_n = B_n.$$

Weil nämlich nach der Voraussetzung für jedes x

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots + A_n x^n$$

und

$$f(x) = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \dots + B_n x^n,$$

folglich für jedes x

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots + A_n x^n \\ = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \dots + B_n x^n$$

ist; so ist nach §. 12.

$$A_0 = B_0, A_1 = B_1, A_2 = B_2, \dots, A_n = B_n,$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 14.

Nach diesen Vorbereitungen wollen wir nun zu der Entwicklung der Potenz

$$(1 + x)^n,$$

wo n immer eine positive ganze Zahl bezeichnet, in eine nach

den positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe übergehen.

I. Dass überhaupt eine Entwicklung der Potenz

$$(1+x)^n$$

in eine nach den positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe möglich ist, erhellet auf der Stelle, wenn man nur die auf einander folgenden Potenzen von $1+x$ von der ersten an durch gemeine Multiplication entwickelt, indem sich auf diese Weise

$$1+x = 1+x,$$

$$(1+x)^2 = 1+2x+x^2,$$

$$(1+x)^3 = 1+3x+3x^2+x^3,$$

$$(1+x)^4 = 1+4x+6x^2+4x^3+x^4,$$

$$(1+x)^5 = 1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5,$$

u. s. w.

ergiebt.

Hieraus schliesst man, dass überhaupt die Potenz

$$(1+x)^n$$

durch eine Reihe von der Form

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots + A_n x^n,$$

wo

$$A_0, A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$$

gewisse constante von x ganz unabhängige Coefficienten bezeichnen, dargestellt werden kann.

Ein völlig strenger und allgemeiner Beweis dieser Behauptung würde sich mittelst der gewöhnlich nach Jacob Bernoulli benannten Schlussart von n auf $n+1$ leicht führen lassen, wobei wir aber, da dieser Beweis nicht die mindeste Schwierigkeit darbietet, hier nicht verweilen.

Hauptsächlich kommt es jetzt auf die Bestimmung der constanten Coefficienten

$$A_0, A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$$

an, zu der wir nun übergehen wollen.

II. Diese Bestimmung zerfällt in zwei Theile, nämlich in die Bestimmung der beiden ersten Coefficienten A_0 und A_1 , und in die Bestimmung der übrigen Coefficienten.

Um nun zuvörderst die Coefficienten A_0 und A_1 zu bestimmen, multipliciren wir die Gleichung

$$(1+x)^n = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots + A_n x^n$$

auf beiden Seiten mit $1+x$. Dadurch erhalten wir die Gleichung

$$(1+x)^{n+1} = A_0 + A_1 \left\{ \begin{array}{l} x \\ + A_0 \end{array} \right\} + A_2 \left\{ \begin{array}{l} x^2 \\ + A_1 \end{array} \right\} + \dots + A_n \left\{ \begin{array}{l} x^n \\ + A_{n-1} \end{array} \right\} + A_n x^{n+1},$$

und sehen also hieraus, dass die Coefficienten der nach den positiven ganzen Potenzen von x fortschreitenden Reihe, durch welche die Potenz

$$(1+x)^{n+1}$$

dargestellt wird,

$A_0, A_0 + A_1, A_1 + A_2, \dots, A_{n-1} + A_n, A_n$

sind, also aus den Coefficienten der nach den positiven ganzen Potenzen von x fortschreitenden Reihe, durch welche die Potenz

$$(1 + x)^n$$

dargestellt wird, immer auf eine höchst einfache Weise durch blosse Addition gefunden werden können.

Was nun insbesondere die beiden ersten Coefficienten betrifft; so folgt hieraus, dass diese Coefficienten, weil dieselben für die erste Potenz von $1 + x$ beide die Einheit sind, für die auf einander folgenden Potenzen dieser Grösse, von der ersten an, nach der Reihe

$$1, 1;$$

$$1, 1 + 1 = 2;$$

$$1, 1 + 2 = 3;$$

$$1, 1 + 3 = 4;$$

$$1, 1 + 4 = 5;$$

u. s. w.

sind.

Ueberhaupt sind also für die Potenz

$$(1 + x)^n$$

die beiden ersten Coefficienten

$$A_0 = 1, A_1 = n.$$

III. Um ferner die übrigen Coefficienten zu bestimmen, wollen wir x sich um die beliebige Grösse z verändern lassen, und wollen die Potenz

$$(1 + x + z)^n$$

auf zwei verschiedene Arten in eine nach den positiven ganzen Potenzen von z fortschreitende Reihe zu entwickeln suchen.

Die erste Entwicklung erhält man, so weit man ihrer hier überhaupt bedarf, auf folgende Art.

Da für jedes x

$$(1 + x)^n = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots + A_n x^n$$

ist; so ist, wenn man $x + z$ für x setzt,

$$(1 + x + z)^n = A_0 + A_1 (x + z) + A_2 (x + z)^2 + \dots + A_n (x + z)^n$$

oder

$$(1 + x + z)^n = A_0 + A_1 x \left(1 + \frac{z}{x}\right) + A_2 x^2 \left(1 + \frac{z}{x}\right)^2 + \dots + A_n x^n \left(1 + \frac{z}{x}\right)^n.$$

Denkt man sich nun die Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in eine nach den positiven ganzen Potenzen von z fortschreitende Reihe, die offenbar aus $n + 1$ Gliedern bestehen wird, entwickelt; so sind die beiden ersten Glieder dieser Reihe, wie sich aus II. sehr leicht ergibt,

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots + A_n x^n$$

und

$$(A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + 4A_4 x^3 + \dots + nA_n x^{n-1})z,$$

und mehr Glieder der in Rede stehenden Reihe brauchen wir zu unserm jetzigen Zweck überhaupt nicht.

Die zweite Entwicklung der Potenz

$$(1 + x + z)^n$$

in eine nach den positiven ganzen Potenzen von z fortschreitende Reihe ergibt sich auf folgende Art.

Es ist

$$(1 + x + z)^n = (1 + x)^n \left(1 + \frac{z}{1+x}\right)^n.$$

Weil nun aber für jedes x

$$(1 + x)^n = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots + A_n x^n$$

ist; so ist

$$\left(1 + \frac{z}{1+x}\right)^n = A_0 + A_1 \frac{z}{1+x} + A_2 \left(\frac{z}{1+x}\right)^2 + \dots + A_n \left(\frac{z}{1+x}\right)^n,$$

und folglich

$$(1 + x + z)^n = A_0 (1+x)^n + A_1 (1+x)^{n-1} z + A_2 (1+x)^{n-2} z^2 + \dots + A_n z^n.$$

Vergleicht man nun die beiden Entwicklungen der Potenz

$$(1 + x + z)^n$$

mit einander; so erhält man, weil diese Entwicklungen für jedes z gelten, nach dem in §. 13. bewiesenen Satze die beiden Gleichungen

$$A_0 (1+x)^n = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots + A_n x^n$$

und

$$A_1 (1+x)^{n-1} = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + 4A_4 x^3 + \dots + nA_n x^{n-1},$$

deren erste, weil nach II.

$$A_0 = 1$$

ist, die bekannte Gleichung

$$(1 + x)^n = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots + A_n x^n$$

ist, von der wir hier überhaupt unsern Auslauf genommen haben, so dass uns also durch diese Gleichung nichts Neues gelehrt wird.

Sehr wichtig für unsern Zweck ist aber die zweite der beiden obigen Gleichungen.

Multiplicirt man nämlich auf beiden Seiten dieser Gleichung mit $1 + x$; so erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned} & A_1 (1+x)^n \\ &= A_1 + 2A_2 \{x + 3A_3 \{x^2 + 4A_4 \{x^3 + \dots + nA_n \{x^{n-1} \\ & \quad + A_1 \} + 2A_2 \} + 3A_3 \} + (n-1)A_{n-1} \} + nA_n x^n, \end{aligned}$$

oder, weil

$$(1 + x)^n = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots + A_n x^n$$

ist, die Gleichung

$$\begin{aligned} & A_1 (A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots + A_n x^n) \\ &= A_1 + 2A_2 \{x + 3A_3 \{x^2 + 4A_4 \{x^3 + \dots + nA_n \{x^{n-1} \\ & \quad + A_1 \} + 2A_2 \} + 3A_3 \} + (n-1)A_{n-1} \} + nA_n x^n. \end{aligned}$$

Weil nun diese Gleichung offenbar für jedes x gilt; so er-

geben sich mittelst des in §. 12. bewiesenen Satzes auf der Stelle die folgenden höchst merkwürdigen Gleichungen zwischen den Coefficienten, mit deren Bestimmung wir es hier zu thun haben:

$$A_1 A_0 = A_1,$$

$$A_1 A_1 = 2 A_2 + A_1,$$

$$A_1 A_2 = 3 A_3 + 2 A_2,$$

$$A_1 A_3 = 4 A_4 + 3 A_3,$$

u. s. w.

$$A_1 A_{n-1} = n A_n + (n-1) A_{n-1},$$

$$A_1 A_n = n A_n.$$

Die erste dieser Gleichungen ist, weil nach II. bekanntlich $A_0 = 1$ ist, eine identische Gleichung; aus den übrigen erhält man aber, weil nach II.

$$A_1 = n = \frac{n}{1}$$

ist, sehr leicht die folgenden merkwürdigen Ausdrücke für die zu bestimmenden Coefficienten:

$$A_1 = \frac{n}{1},$$

$$A_2 = \frac{A_1 (n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2},$$

$$A_3 = \frac{A_2 (n-2)}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

$$A_4 = \frac{A_3 (n-3)}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

u. s. w.

u. s. w.

$$A_n = \frac{A_{n-1} (n - (n-1))}{n} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n}.$$

So sind also nun die gesuchten Coefficienten sämmtlich und in völliger Allgemeinheit bestimmt.

IV. Setzen wir der Kürze wegen, wie in der Folge immer geschehen soll,

$$n_1 = \frac{n}{1},$$

$$n_2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2},$$

$$n_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

$$n_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

u. s. w.

$$n_n = \frac{n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n},$$

so ist

$$(1+x)^n = 1 + n_1 x + n_2 x^2 + n_3 x^3 + \dots + n_n x^n,$$

und folglich, weil

$$(a + b)^n = a^n \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n$$

ist, wie leicht erhellen wird,

$$(a + b)^n = a^n + n_1 a^{n-1} b + n_2 a^{n-2} b^2 + \dots + n_{n-1} a b^{n-1} + n_n b^n.$$

Diese Reihe nennt man die Binomial-Reihe für positive ganze Exponenten, und den in vorstehender Gleichung enthaltenen Lehrsatz den Binomischen Lehrsatz oder das Binomial-Theorem für positive ganze Exponenten.

Die Grössen

$$n_1, n_2, n_3, n_4, \dots, n_{n-1}, n_n$$

heissen die Binomial-Coefficienten der n ten Potenz.

V. Aus II. folgt, dass die Binomial-Coefficienten der auf einander folgenden Potenzen nach und nach auf folgende Art entstehen :

$$1, 1;$$

$$1=1, 1+1=2, 1=1;$$

$$1=1, 1+2=3, 2+1=3, 1=1;$$

$$1=1, 1+3=4, 3+3=6, 3+1=4, 1=1;$$

$$1=1, 1+4=5, 4+6=10, 6+4=10, 4+1=5, 1=1;$$

u. s. w.

u. s. w.

Wird man also bei irgend einer Untersuchung, wie es in der That nicht selten der Fall ist, auf Zahlen geführt, welche auf diese Weise nach und nach entstehen; so sind dieselben jederzeit dem allgemeinen Gesetze der Binomial-Coefficienten, welches wir in III. kennen gelernt haben, unterworfen.

§. 15.

Kehren wir nun wieder zu der Entwicklung der Differenz der Function

$$y = x^n,$$

wo n eine positive ganze Zahl bezeichnet, in eine nach den positiven ganzen Potenzen von Δx fortschreitende Reihe, von welcher wir in §. 11. ausgingen, zurück; so haben wir

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n.$$

Nach dem Binomischen Lehrsatz für positive ganze Exponenten ist aber, wenn wir uns der eingeführten Bezeichnung der Binomial-Coefficienten auch hier bedienen,

$$(x + \Delta x)^n = x^n + n_1 x^{n-1} \Delta x + n_2 x^{n-2} \Delta x^2 + \dots$$

$$\dots + n_{n-1} x \Delta x^{n-1} + n_n \Delta x^n.$$

Also ist

$$\Delta y = n_1 x^{n-1} \Delta x + n_2 x^{n-2} \Delta x^2 + n_3 x^{n-3} \Delta x^3 + \dots$$

$$\dots + n_{n-1} x \Delta x^{n-1} + n_n \Delta x^n,$$

und hierdurch folglich die gesuchte Entwicklung der Differenz der Function

$$y = x^n,$$

wenn nämlich, was man nie aus den Augen verlieren darf, n eine positive ganze Zahl bezeichnet, gefunden.

Nächst dieser Entwicklung der Differenz der Function $y = x^n$, wo n eine positive ganze Zahl bezeichnet, in eine nach den positiven ganzen Potenzen von Δx fortschreitende Reihe, sind für das Folgende einige allgemeine Formeln von besonderer Wichtigkeit, durch welche die Entwicklung der Differenzen der mittelst der einfachsten Rechnungsoperationen zusammengesetzten Functionen, d. i. der Functionen, welche Summen, Unterschiede, Producte oder Quotienten anderer Functionen sind, ungemein erleichtert wird. Die übrigens sehr einfache Entwicklung dieser allgemeinen Formeln soll daher jetzt unser nächstes Geschäft seyn.

§. 16.

Aufgabe. Wenn, indem a eine constante Grösse, p eine beliebige Function von x bezeichnet,

$$y = ap$$

ist, die Differenz von y durch die Differenz von p auszudrücken.

Auflösung. Setzt man in der Gleichung

$$y = ap$$

$x + \Delta x$ für x , und bezeichnet die diesem Werthe von x entsprechenden Werthe der Functionen y und p wie in §. 9. durch $y^{(1)}$ und $p^{(1)}$; so ist

$$y^{(1)} = ap^{(1)},$$

und folglich

$$\Delta y = y^{(1)} - y = a\{p^{(1)} - p\}.$$

Aber

$$\Delta p = p^{(1)} - p.$$

Also ist

$$\Delta y = a\Delta p,$$

und durch diese Formel unsere Aufgabe aufgelöst.

§. 17.

Aufgabe. Wenn, indem a eine beliebige constante Grösse ist, dagegen $p, q, s, \dots u$ beliebige Functionen von x bezeichnen,

$$y = a \pm p \pm q \pm s \pm \dots \pm u$$

ist, die Differenz von y durch die Differenzen von $p, q, s, \dots u$ auszudrücken.

Auflösung. Aus der Gleichung

$$y = a \pm p \pm q \pm s \pm \dots \pm u$$

ergiebt sich, wenn man $x + \Delta x$ für x setzt,

$$y^{(1)} = a \pm p^{(1)} \pm q^{(1)} \pm s^{(1)} \pm \dots \pm u^{(1)}.$$

Folglich ist

$$\Delta y = \pm \{p^{(1)} - p\} \pm \{q^{(1)} - q\} \pm \{s^{(1)} - s\} \pm \dots \pm \{u^{(1)} - u\},$$

d. i.

$$\Delta y = \pm \Delta p \pm \Delta q \pm \Delta s \pm \dots \pm \Delta u,$$

wodurch unsere Aufgabe aufgelöst ist.

§. 18.

Dass die Differenz jeder constanten Grösse $= 0$ zu setzen ist, fällt sogleich in die Augen, lässt sich aber auch aus dem Vorhergehenden auf folgende sehr einfache Weise herleiten.

Es sei, indem a eine beliebige constante Grösse, p eine beliebige Function von x bezeichnet,

$$y = a + p;$$

so ist nach §. 17.

$$\Delta y = \Delta p.$$

Ist aber überhaupt von einer Differenz der Grösse a die Rede, so sieht man dieselbe offenbar eigentlich als eine Function von x an, und hat dann nach §. 17. auch

$$\Delta y = \Delta a + \Delta p.$$

Durch Gleichsetzung der beiden gefundenen Ausdrücke von Δy ergibt sich

$$\Delta p = \Delta a + \Delta p,$$

und hieraus folgt

$$\Delta a = 0,$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 19.

Mit Hülfe von §. 15., §. 16. und §. 17. ist man im Stande, die Differenz jeder ganzen rationalen algebraischen Function einer veränderlichen Grösse mit Leichtigkeit zu entwickeln.

Weil nämlich die allgemeine Form einer ganzen rationalen algebraischen Function einer veränderlichen Grösse

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots + Lx^k$$

ist, wo $A, B, C, D, \dots, L$ constante Grössen bezeichnen; so ist nach §. 16. und §. 17.

$$\Delta y = B\Delta x + C\Delta \cdot x^2 + D\Delta \cdot x^3 + \dots + L\Delta \cdot x^k.$$

Entwickelt man nun nach §. 15. die sämtlichen Differenzen der Potenzen von x in nach den positiven ganzen Potenzen von Δx fortschreitende Reihen; so wird man offenbar auch Δy leicht in eine eben solche Reihe entwickeln können, wie wir hier nur an dem folgenden Beispiele zeigen wollen.

Es sei

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3;$$

so ist nach §. 16. und §. 17.

$$\Delta y = B\Delta x + C\Delta \cdot x^2 + D\Delta \cdot x^3.$$

Nach §. 15. ist

$$\Delta \cdot x^2 = 2x \Delta x + \Delta x^2,$$

$$\Delta \cdot x^3 = 3x^2 \Delta x + 3x \Delta x^2 + \Delta x^3.$$

Folglich ist

$$\Delta y = (B + 2Cx + 3Dx^2) \Delta x + (C + 3Dx) \Delta x^2 + D \Delta x^3.$$

Wie man sich in jedem andern Falle zu verhalten hat, wird hieraus deutlich genug erhellen.

§. 20.

Aufgabe. Wenn p und q Functionen von x sind, und

$$y = pq$$

ist, die Differenz von y durch die Differenzen von p und q auszudrücken.

Auflösung. Setzt man in der Gleichung

$$y = pq$$

$x + \Delta x$ für x ; so erhält man die Gleichung

$$y^{(1)} = p^{(1)} q^{(1)}.$$

Weil aber bekanntlich

$$\Delta p = p^{(1)} - p, \Delta q = q^{(1)} - q,$$

also

$$p^{(1)} = p + \Delta p, q^{(1)} = q + \Delta q$$

ist; so ist

$$\begin{aligned} y^{(1)} &= (p + \Delta p)(q + \Delta q) \\ &= pq + p\Delta q + q\Delta p + \Delta p \Delta q \\ &= y + p\Delta q + q\Delta p + \Delta p \Delta q, \end{aligned}$$

und folglich

$$y^{(1)} - y = p\Delta q + q\Delta p + \Delta p \Delta q,$$

d. i.

$$\Delta y = p\Delta q + q\Delta p + \Delta p \Delta q,$$

wodurch unsere Aufgabe aufgelöst ist.

Zu bemerken ist noch, dass man diese Gleichung, wenn man auf beiden Seiten derselben mit

$$y = pq$$

dividirt, auch auf die elegante Form

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta p}{p} + \frac{\Delta q}{q} + \frac{\Delta p}{p} \cdot \frac{\Delta q}{q}$$

bringen kann.

§. 21.

Leicht ist es nun auch, die Differenzen der Producte mit mehr als zwei Factoren durch die Differenzen der einzelnen Factoren auszudrücken, wie wir an den folgenden Beispielen zeigen wollen.

Für $y = pqr$ ist nach §. 20.

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta \cdot pq}{pq} + \frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta \cdot pq}{pq} \cdot \frac{\Delta r}{r}.$$

Weil nun aber nach §. 20.

$$\frac{\Delta \cdot pq}{pq} = \frac{\Delta p}{p} + \frac{\Delta q}{q} + \frac{\Delta p}{p} \cdot \frac{\Delta q}{q}$$

ist; so ist

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{y} &= \frac{\Delta p}{p} + \frac{\Delta q}{q} + \frac{\Delta r}{r} \\ &+ \frac{\Delta p}{p} \cdot \frac{\Delta q}{q} + \frac{\Delta p}{p} \cdot \frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta q}{q} \cdot \frac{\Delta r}{r} \\ &+ \frac{\Delta p}{p} \cdot \frac{\Delta q}{q} \cdot \frac{\Delta r}{r}.\end{aligned}$$

Für $y = pqrs$ ist nach §. 20.

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta \cdot pqr}{pqr} + \frac{\Delta s}{s} + \frac{\Delta \cdot pqr}{pqr} \cdot \frac{\Delta s}{s},$$

und folglich, wenn man für

$$\frac{\Delta \cdot pqr}{pqr}$$

den vorher gefundenen Ausdruck einführt:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{y} &= \frac{\Delta p}{p} + \frac{\Delta q}{q} + \frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta s}{s} \\ &+ \frac{\Delta p}{p} \cdot \frac{\Delta q}{q} + \frac{\Delta p}{p} \cdot \frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta p}{p} \cdot \frac{\Delta s}{s} + \frac{\Delta q}{q} \cdot \frac{\Delta r}{r} \\ &\quad + \frac{\Delta q}{q} \cdot \frac{\Delta s}{s} + \frac{\Delta r}{r} \cdot \frac{\Delta s}{s} \\ &+ \frac{\Delta p}{p} \cdot \frac{\Delta q}{q} \cdot \frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta p}{p} \cdot \frac{\Delta q}{q} \cdot \frac{\Delta s}{s} + \frac{\Delta p}{p} \cdot \frac{\Delta r}{r} \cdot \frac{\Delta s}{s} \\ &\quad + \frac{\Delta q}{q} \cdot \frac{\Delta r}{r} \cdot \frac{\Delta s}{s} \\ &+ \frac{\Delta p}{p} \cdot \frac{\Delta q}{q} \cdot \frac{\Delta r}{r} \cdot \frac{\Delta s}{s}.\end{aligned}$$

Wie man sich bei Producten mit noch mehr Factoren zu verhalten hat, wird nun schon deutlich genug erhellen.

§. 22.

Aufgabe. Wenn p und q Functionen von x sind, und

$$y = \frac{p}{q}$$

ist, die Differenz von y durch die Differenzen von p und q auszudrücken.

Auflösung. Setzt man in der Gleichung

$$y = \frac{p}{q}$$

$x + \Delta x$ für x ; so erhält man

$$y^{(1)} = \frac{p^{(1)}}{q^{(1)}},$$

oder, weil

$$p^{(1)} = p + \Delta p, \quad q^{(1)} = q + \Delta q$$

ist,

$$y^{(1)} = \frac{p + \Delta p}{q + \Delta q},$$

und folglich

$$\Delta y = y^{(1)} - y = \frac{p + \Delta p}{q + \Delta q} - \frac{p}{q},$$

woraus man nach leichter Rechnung

$$\Delta y = \frac{q \Delta p - p \Delta q}{q (q + \Delta q)}$$

erhält.

Dieselbe Formel ergibt sich auch leicht auf folgende Art.

Weil

$$y = \frac{p}{q}$$

ist, so ist

$$p = qy,$$

und folglich nach §. 20.

$$\Delta p = q \Delta y + y \Delta q + \Delta q \Delta y$$

oder

$$\Delta p = (q + \Delta q) \Delta y + y \Delta q.$$

Also ist

$$\Delta y = \frac{\Delta p - y \Delta q}{q + \Delta q},$$

und folglich, wenn man in diese Formel für y den Ausdruck

$$y = \frac{p}{q}$$

einführt, in völliger Uebereinstimmung mit dem Vorhergehenden,

$$\Delta y = \frac{q \Delta p - p \Delta q}{q (q + \Delta q)}.$$

§. 23.

Die Differenz Δy der beliebigen Function y von x ist, indem man Δx immer als constant betrachtet, offenbar im Allgemeinen selbst eine Function von x , und man kann also, indem man in der Differenz Δy die veränderliche Grösse x in $x + \Delta x$ übergehen lässt, auf ganz ähnliche Art, wie man die Differenz von y nimmt, die Differenz von Δy nehmen. Diese Differenz von Δy heisst die zweite Differenz der Function y , und Δy selbst wird in dieser Beziehung die erste Differenz von y genannt. Ganz auf dieselbe Weise ist nun ferner auch die zweite Differenz von y im Allgemeinen eine Function von x , so dass man also, Δx immer als constant betrachtend, auch in dieser zweiten Differenz wieder x in $x + \Delta x$ übergehen lassen und von dieser zweiten Differenz die erste Differenz nehmen kann. Diese erste Differenz der zweiten Differenz der Function y heisst dann die dritte Differenz von y . Dass man auf diese Art immer weiter gehen kann, ist klar, und man erhält also überhaupt die $(n+1)$ te Differenz der Function y , wenn man von der n ten Differenz derselben, diese Differenz als eine Function von x , Δx stets als constant betrachtend, die erste Differenz nimmt.

Die erste, zweite, dritte, vierte, fünfte, u. s. w. nte Differenz der Function y bezeichnet man nach der Reihe durch

$$\Delta y, \Delta^2 y, \Delta^3 y, \Delta^4 y, \Delta^5 y, \dots \Delta^n y, \dots,$$

und nach den obigen allgemeinen Begriffen ist

$$\Delta^{n+1} y = \Delta \Delta^n y.$$

Auch wird nun sogleich der Sinn und die Richtigkeit der allgemeinen Gleichung

$$\Delta^{m+n} y = \Delta^m \Delta^n y$$

erhellen.

§. 24.

Als ein Beispiel zu dem Vorhergehenden wollen wir wieder die einfache Function

$$y = x^n,$$

wo n eine positive ganze Zahl seyn soll, betrachten, indem wir nach und nach $n=1, 2, 3, 4, 5, \dots$ setzen.

Für $y = x$ ist

$$\Delta y = \Delta x,$$

und die höhern Differenzen verschwinden folglich, weil Δx eine constante Grösse ist, nach §. 18. sämmtlich.

Für $y = x^2$ ist nach §. 15.

$$\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x^2,$$

und folglich, wenn man nun hiervon nach §. 16. und §. 17., Δx immer als constant betrachtend, die Differenz nimmt,

$$\Delta^2 y = 2\Delta x^2,$$

so dass also in diesem Falle die zweite Differenz eine constante Grösse ist, demnach die höhern Differenzen nach §. 18. wieder sämmtlich verschwinden.

Für $y = x^3$ ist nach §. 15.

$$\Delta y = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3.$$

Nimmt man nun hiervon nach §. 16. und §. 17. die Differenz; so erhält man

$$\Delta^2 y = 3\Delta \cdot x^2\Delta x + 3\Delta x^3.$$

Nach §. 15. ist aber

$$\Delta \cdot x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2,$$

und folglich nach gehöriger Substitution

$$\Delta^2 y = 2 \cdot 3x\Delta x^2 + 6\Delta x^3.$$

Nimmt man nun hiervon nach §. 16. und §. 17. wieder die Differenz; so ergiebt sich

$$\Delta^3 y = 2 \cdot 3\Delta x^3.$$

Also sind in diesem Falle, wo die dritte Differenz eine constante Grösse ist, die höhern Differenzen von der vierten an sämmtlich $= 0$.

24 Differentialrechnung. Zweites Kapitel.

Für $y = x^4$ ist nach §. 15.

$$\Delta y = 4x^3 \Delta x + 6x^2 \Delta x^2 + 4x \Delta x^3 + \Delta x^4.$$

Also ist nach §. 16. und §. 17.

$$\Delta^2 y = 4 \Delta . x^3 \Delta x + 6 \Delta . x^2 \Delta x^2 + 4 \Delta x^4,$$

und folglich, weil nach §. 15.

$$\begin{aligned} \Delta . x^3 &= 3x^2 \Delta x + 3x \Delta x^2 + \Delta x^3, \\ \Delta . x^2 &= 2x \Delta x + \Delta x^2 \end{aligned}$$

ist, nach gehöriger Substitution:

$$\Delta^2 y = 3 \cdot 4x^2 \Delta x^2 + 24x \Delta x^3 + 14 \Delta x^4.$$

Nimmt man hiervon nach §. 16. und §. 17. wieder die Differenz; so erhält man

$$\Delta^3 y = 3 \cdot 4 \Delta . x^2 \Delta x^2 + 24 \Delta x^4,$$

und folglich, weil nach §. 15.

$$\Delta . x^2 = 2x \Delta x + \Delta x^2$$

ist, nach gehöriger Substitution:

$$\Delta^3 y = 2 \cdot 3 \cdot 4x \Delta x^3 + 36 \Delta x^4.$$

Nimmt man nun hiervon wieder nach §. 16. und §. 17. die Differenz; so erhält man

$$\Delta^4 y = 2 \cdot 3 \cdot 4 \Delta x^4,$$

und sieht also, dass im vorliegenden Falle die vierte Differenz constant ist, alle höhern Differenzen folglich verschwinden.

Wir wollen der Kürze wegen diesen an sich ganz leichten Calcul nicht weiter fortführen. Eine in mehrfacher Beziehung wichtige Bemerkung, zu welcher uns dieser Calcul ganz von selbst führt, dürfen wir aber nicht unerwähnt lassen.

Betrachten wir nämlich die nachstehenden vorher gefundenen Differenzen:

$$\begin{aligned} \Delta x &= \Delta x &= 1 \Delta x, \\ \Delta^2 . x^2 &= 2 \Delta x^2 &= 1 \cdot 2 \Delta x^2, \\ \Delta^3 . x^3 &= 2 \cdot 3 \cdot \Delta x^3 &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \Delta x^3, \\ \Delta^4 . x^4 &= 2 \cdot 3 \cdot 4 \Delta x^4 &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \Delta x^4; \end{aligned}$$

so ist ein bestimmtes Gesetz, nach welchem diese sämmtlich constanten Differenzen fortschreiten, nicht zu verkennen, und wir werden durch die einfachste Induction sogleich zu dem Schlusse geführt, dass, wenn

$$y = x^n$$

und n eine positive ganze Zahl ist, allgemein

$$\Delta^n y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n \Delta x^n,$$

und daher diese Differenz jederzeit eine constante Grösse ist, die höhern Differenzen der gegebenen Function folglich sämmtlich verschwinden.

Dass nun dieser Schluss, in der Allgemeinheit, wie er so eben ausgesprochen worden, in der That völlig richtig ist, soll im folgenden Paragraphen bewiesen werden.

§. 25.

Lehrsatz. Wenn, indem n eine positive ganze Zahl bezeichnet, $y = x^n$ ist, so ist

$$\Delta^n y = 1.2.3.4 \dots n \Delta x^n;$$

diese Differenz ist folglich jederzeit eine constante Grösse, und die höhern Differenzen der Function y von der $(n+1)$ ten an verschwinden also sämmtlich.

Beweis. Dieser Lehrsatz lässt sich, ohne uns jetzt weiter auf den vorhergehenden Paragraphen zu beziehen, auf folgende Art beweisen.

Für $y = x$ ist

$$\Delta y = \Delta x = 1 \Delta x,$$

also

$$\Delta^2 y = \Delta^3 y = \Delta^4 y = \Delta^5 y = \dots = 0,$$

und der Satz ist also in diesem Falle offenbar richtig.

Für $y = x^2$ ist nach §. 15.

$$\Delta y = 2x \Delta x + \Delta x^2.$$

Folglich ist nach §. 16. und §. 17.

$$\Delta^2 y = 2 \Delta x \Delta x$$

oder

$$\Delta^2 y = 1.2 \Delta x^2;$$

also

$$\Delta^3 y = \Delta^4 y = \Delta^5 y = \Delta^6 y = \dots = 0,$$

und daher der Satz auch in diesem Falle bewiesen.

Für $y = x^3$ ist nach §. 15.

$$\Delta y = 3x^2 \Delta x + 3x \Delta x^2 + \Delta x^3.$$

Nimmt man nun hiervon zwei Mal nach einander die Differenz; so erhält man nach §. 16. und §. 17.

$$\Delta^3 y = 3 \Delta^2 . x^2 \Delta x + 3 \Delta^2 x \Delta x^2.$$

Nach dem Vorhergehenden ist aber

$$\Delta^2 . x^2 = 1.2 \Delta x^2, \Delta^2 x = 0.$$

Also ist

$$\Delta^3 y = 1.2.3 \Delta x^3,$$

und folglich

$$\Delta^4 y = \Delta^5 y = \Delta^6 y = \Delta^7 y = \dots = 0,$$

der Satz daher auch in diesem Falle bewiesen.

Für $y = x^4$ ist nach §. 15.

$$\Delta y = 4x^3 \Delta x + 6x^2 \Delta x^2 + 4x \Delta x^3 + \Delta x^4.$$

Nimmt man nun hiervon nach §. 16. und §. 17. drei Mal die Differenz nach einander; so erhält man

$$\Delta^4 y = 4 \Delta^3 . x^3 \Delta x + 6 \Delta^3 . x^2 \Delta x^2 + 4 \Delta^3 x \Delta x^3.$$

Nach dem Vorhergehenden ist aber

$$\Delta^3 . x^3 = 1.2.3 \Delta x^3, \Delta^3 . x^2 = 0, \Delta^3 x = 0.$$

Also ist

$$\Delta^4 y = 1.2.3.4 \Delta x^4,$$

und folglich

$$\Delta^5 y = \Delta^6 y = \Delta^7 y = \Delta^8 y = \dots = 0,$$

der Satz daher auch in diesem Falle bewiesen.

Es erhellet nun auch schon, wie man auf diese Art ohne alle Schwierigkeit immer weiter gehen kann.

Ueberhaupt wollen wir jetzt aber annehmen, dass der Satz schon bis zur $(n-1)$ ten Potenz von x bewiesen sey, und wollen zeigen, dass er unter dieser Voraussetzung jederzeit auch für die nächst folgende n te Potenz von x , d. i. für $y = x^n$ gelten muss, woraus dann ferner seine allgemeine Gültigkeit auf bekannte Weise folgt.

Für $y = x^n$ ist nach §. 15.

$$\Delta y = n_1 x^{n-1} \Delta x + n_2 x^{n-2} \Delta x^2 + n_3 x^{n-3} \Delta x^3 + \dots \\ \dots + n_{n-1} x \Delta x^{n-1} + n_n \Delta x^n.$$

Nimmt man nun hiervon $(n-1)$ mal nach einander die Differenz; so erhält man ohne Schwierigkeit nach §. 16. und §. 17.

$$\Delta^n y = n_1 \Delta^{n-1} . x^{n-1} \Delta x + n_2 \Delta^{n-1} . x^{n-2} \Delta x^2 + n_3 \Delta^{n-1} . x^{n-3} \Delta x^3 + \dots \\ \dots + n_{n-1} \Delta^{n-1} x \Delta x^{n-1}.$$

Weil aber nach der Voraussetzung der zu beweisende Satz bis zur $(n-1)$ ten Potenz von x gilt; so ist

$$\Delta^{n-1} . x^{n-1} = 1.2.3 \dots (n-1) \Delta x^{n-1}$$

und

$$\Delta^{n-1} . x^{n-2} = 0, \Delta^{n-1} . x^{n-3} = 0, \dots \Delta^{n-1} x = 0.$$

Also ist, weil bekanntlich $n_1 = n$ ist,

$$\Delta^n y = 1.2.3.4 \dots n \Delta x^n,$$

und folglich, weil diese Differenz eine constante Grösse ist,

$$\Delta^{n+1} y = \Delta^{n+2} y = \Delta^{n+3} y = \Delta^{n+4} y = \dots = 0,$$

so dass also der Satz in der That für $y = x^n$ gilt, wenn er bis zur $(n-1)$ ten Potenz von x bewiesen ist, und daher hierdurch nun nach einer bekannten, hier nicht zu wiederholenden, Schlussweise in völliger Allgemeinheit gerechtfertigt ist.

§. 26.

Mittelst des vorhergehenden Satzes kann man nun auch sehr leicht die n te Differenz jeder ganzen rationalen algebraischen Function des n ten Grades einer veränderlichen Grösse finden.

Weil nämlich die allgemeine Form jeder ganzen rationalen algebraischen Function des n ten Grades einer veränderlichen Grösse

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots + Mx^{n-1} + Nx^n$$

ist, wo $A, B, C, D, \dots N$ constante Grössen bezeichnen; so ist, wie mittelst §. 16. und §. 17. leicht gefunden wird,

$$\Delta^n y = B \Delta^n x + C \Delta^n . x^2 + D \Delta^n . x^3 + \dots + M \Delta^n . x^{n-1} + N \Delta^n . x^n.$$

Weil nun aber nach §. 25.

und $\Delta^n x = 0, \Delta^n x^2 = 0, \Delta^n x^3 = 0, \dots \Delta^n x^{n-1} = 0$

ist; so ist $\Delta^n x^n = 1.2.3.4\dots n \Delta x^n$

$$\Delta^n y = 1.2.3.4\dots n N \Delta x^n.$$

Hieraus erhellet zugleich, dass die n te Differenz einer jeden ganzen rationalen algebraischen Function des n ten Grades einer veränderlichen Grösse eine constante Grösse ist, und alle höhern Differenzen einer solchen Function von der $(n+1)$ ten an also verschwinden.

§. 27.

Wie aus der beliebigen Function

$$y = f(x)$$

die Reihe

$$\Delta y, \Delta^2 y, \Delta^3 y, \Delta^4 y, \dots \Delta^n y; \dots$$

hergeleitet werden kann, geht aus dem Vorhergehenden deutlich genug hervor.

Nach einem von dem hierbei zum Grunde liegenden verschiedenen Princip kann man aber aus der in Rede stehenden beliebigen Function jederzeit noch eine andere Reihe herleiten.

Setzt man nämlich in der Function

$$y = f(x)$$

$x + \Delta x$ für x , so erhält man die Function

$$f(x + \Delta x),$$

welche oben schon durch $y^{(1)}$ bezeichnet worden ist. Setzt man in dieser Function wieder $x + \Delta x$ für x , so erhält man die Function

$$f(x + 2 \Delta x),$$

welche im Folgenden durch $y^{(2)}$ bezeichnet werden soll. Setzt man nun in dieser Function wieder $x + \Delta x$ für x , so ergibt sich die Function

$$f(x + 3 \Delta x),$$

welche wir im Folgenden durch $y^{(3)}$ bezeichnen wollen. Wie man auf diese Art weiter gehen kann, erhellet nun schon deutlich. Ueberhaupt soll im Folgenden die Function

$$f(x + n \Delta x)$$

durch $y^{(n)}$ bezeichnet werden.

Man kann also aus der beliebigen Function

$$y = f(x)$$

jederzeit die beiden Reihen

$$y, \Delta y, \Delta^2 y, \Delta^3 y, \dots \Delta^n y, \dots$$

und

$$y, y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}, \dots y^{(n)}, \dots,$$

welche in mehrfacher Rücksicht wichtig und merkwürdig sind, herleiten. Vorzüglich bemerkenswerth ist es, dass diese beiden Reihen in einer solchen Beziehung zu einander stehen, dass im-

mer jedes Glied der einen bloss durch Glieder der andern ausgedrückt werden kann. Dies soll nun zunächst in den beiden folgenden Aufgaben gezeigt werden.

§. 28.

Aufgabe. Jedes Glied der Reihe

$$y, \Delta y, \Delta^2 y, \Delta^3 y, \dots \Delta^n y, \dots$$

bloss durch Glieder der Reihe

$$y, y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}, \dots y^{(n)}, \dots$$

auszudrücken.

Auflösung. Weil

$$y^{(n-1)} = f(x + (n-1)\Delta x), \quad y^{(n)} = f(x + n\Delta x)$$

ist; so geht offenbar überhaupt $y^{(n)}$ aus $y^{(n-1)}$ hervor, wenn man in letzterer Function $x + \Delta x$ für x setzt.

Diese allgemeine Bemerkung liegt der folgenden Rechnung vorzüglich zum Grunde.

Zunächst ist nun, wie sich von selbst versteht,

$$y = y.$$

Nach dem allgemeinen Begriffe der Differenz einer Function ist ferner

$$\Delta y = y^{(1)} - y.$$

Hieraus erhält man bekanntlich $\Delta^2 y$, wenn man x in $x + \Delta x$ übergehen lässt, und dann Δy abzieht. Dies giebt, indem man zugleich die oben gemachte allgemeine Bemerkung in Anwendung bringt, auf der Stelle

$$\begin{aligned} \Delta^2 y &= y^{(2)} - y^{(1)} \\ &\quad - y^{(1)} + y \\ &= y^{(2)} - 2y^{(1)} + y. \end{aligned}$$

Hieraus erhält man $\Delta^3 y$, wenn man x in $x + \Delta x$ übergehen lässt, und dann $\Delta^2 y$ abzieht. Dies giebt, indem man immer die gleich zu Anfang gemachte allgemeine Bemerkung vor Augen behält,

$$\begin{aligned} \Delta^3 y &= y^{(3)} - 2y^{(2)} + y^{(1)} \\ &\quad - y^{(2)} + 2y^{(1)} - y \\ &= y^{(3)} - 3y^{(2)} + 3y^{(1)} - y. \end{aligned}$$

Hieraus erhält man $\Delta^4 y$, wenn man x in $x + \Delta x$ übergehen lässt, und dann $\Delta^3 y$ abzieht. Dies giebt

$$\begin{aligned} \Delta^4 y &= y^{(4)} - 3y^{(3)} + 3y^{(2)} - y^{(1)} \\ &\quad - y^{(3)} + 3y^{(2)} - 3y^{(1)} + y \\ &= y^{(4)} - 4y^{(3)} + 6y^{(2)} - 4y^{(1)} + y. \end{aligned}$$

Hieraus ergiebt sich $\Delta^5 y$, wenn man $x + \Delta x$ für x setzt, und dann $\Delta^4 y$ abzieht. Dadurch erhält man

$$\begin{aligned} \Delta^5 y &= y^{(5)} - 4y^{(4)} + 6y^{(3)} - 4y^{(2)} + y^{(1)} \\ &\quad - y^{(4)} + 4y^{(3)} - 6y^{(2)} + 4y^{(1)} - y \\ &= y^{(5)} - 5y^{(4)} + 10y^{(3)} - 10y^{(2)} + 5y^{(1)} - y. \end{aligned}$$

Auf diese Art immer weiter zu gehen, hat nicht die mindeste Schwierigkeit; auch übersieht man auf der Stelle das allgemeine Gesetz, nach welchem diese Ausdrücke fortschreiten.

Bei der geringsten Aufmerksamkeit kann nämlich nicht unbemerkt bleiben, dass die in diesen Formeln vorkommenden numerischen Coefficienten nach und nach ganz auf dieselbe Art entstehen, wie die in §. 14. V. betrachteten Zahlen, und daher nichts anders sind, als die Binomial-Coefficienten der auf einander folgenden Potenzen mit positiven ganzen Exponenten.

Dies vorausgesetzt, wird man sich, mit gehöriger Berücksichtigung der übrigen sogleich in die Augen fallenden Eigenthümlichkeiten der oben entwickelten Formeln, auf der Stelle von der Richtigkeit der folgenden allgemeinen Formel überzeugen:

$$\Delta^n y = y^{(n)} - n_1 y^{(n-1)} + n_2 y^{(n-2)} - n_3 y^{(n-3)} + \dots \\ \dots + n_{n-1} (-1)^{n-1} y^{(1)} + n_n (-1)^n y.$$

§. 29.

Aufgabe. Jedes Glied der Reihe

$$y, y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}, \dots y^{(n)}, \dots$$

bloss durch Glieder der Reihe

$$y, \Delta y, \Delta^2 y, \Delta^3 y, \dots \Delta^n y, \dots$$

auszudrücken.

Auflösung. Bekanntlich ist allgemein

$$y^{(n)} = f(x + n\Delta x).$$

Lässt man hierin x in $x + \Delta x$ übergehen und zieht $y^{(n)}$ ab; so erhält man

$$\Delta \cdot y^{(n)} = f(x + (n+1)\Delta x) - f(x + n\Delta x),$$

d. i.

$$\Delta \cdot y^{(n)} = y^{(n+1)} - y^{(n)}.$$

Also ist allgemein

$$y^{(n+1)} = y^{(n)} + \Delta \cdot y^{(n)}.$$

Hieraus ergiebt sich nun mit Anwendung von §. 16. und §. 17. nach und nach

$$1. \quad y^{(1)} = y + \Delta y;$$

$$2. \quad y^{(2)} = y^{(1)} + \Delta \cdot y^{(1)} \\ = y + \Delta y \\ \quad \quad + \Delta y + \Delta^2 y \\ = y + 2\Delta y + \Delta^2 y;$$

$$3. \quad y^{(3)} = y^{(2)} + \Delta \cdot y^{(2)} \\ = y + 2\Delta y + \Delta^2 y \\ \quad \quad + \Delta y + 2\Delta^2 y + \Delta^3 y \\ = y + 3\Delta y + 3\Delta^2 y + \Delta^3 y;$$

$$4. \quad y^{(4)} = y^{(3)} + \Delta \cdot y^{(3)} \\ = y + 3\Delta y + 3\Delta^2 y + \Delta^3 y \\ \quad \quad + \Delta y + 3\Delta^2 y + 3\Delta^3 y + \Delta^4 y \\ = y + 4\Delta y + 6\Delta^2 y + 4\Delta^3 y + \Delta^4 y;$$

$$\begin{aligned}
5. \quad y^{(5)} &= y^{(4)} + \Delta \cdot y^{(4)} \\
&= y + 4\Delta y + 6\Delta^2 y + 4\Delta^3 y + \Delta^4 y \\
&\quad + \Delta y + 4\Delta^2 y + 6\Delta^3 y + 4\Delta^4 y + \Delta^5 y \\
&= y + 5\Delta y + 10\Delta^2 y + 10\Delta^3 y + 5\Delta^4 y + \Delta^5 y; \\
&\quad \text{u. s. w.}
\end{aligned}$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar, und auf ganz ähnliche Art wie in §. 28. überzeugt man sich sogleich, dass allgemein

$$y^{(n)} = y + n_1 \Delta y + n_2 \Delta^2 y + n_3 \Delta^3 y + \dots + n_n \Delta^n y$$

ist.

§. 30.

Unter den mannigfaltigen Anwendungen, welche sich von den in den beiden vorhergehenden Paragraphen gefundenen allgemeinen Formeln machen lassen, bietet sich zuerst folgende dar.

Wenn $y = x^n$ ist, wo n eine positive ganze Zahl bezeichnen soll, so ist allgemein

$$y^{(k)} = (x + k\Delta x)^n.$$

Also ist nach §. 28.

$$\begin{aligned}
\Delta^n y &= \{x + n\Delta x\}^n - n_1 \{x + (n-1)\Delta x\}^n + n_2 \{x + (n-2)\Delta x\}^n - \dots \\
&\quad \dots + n_{n-1}(-1)^{n-1} \{x + \Delta x\}^n + n_n(-1)^n x^n.
\end{aligned}$$

Nach §. 25. ist aber

$$\Delta^n y = 1.2.3.4\dots n \Delta x^n.$$

Also ist für jedes x und jedes Δx

$$\begin{aligned}
&1.2.3.4\dots n \Delta x^n \\
&= \{x + n\Delta x\}^n - n_1 \{x + (n-1)\Delta x\}^n + n_2 \{x + (n-2)\Delta x\}^n - \dots \\
&\quad \dots + n_{n-1}(-1)^{n-1} \{x + \Delta x\}^n + n_n(-1)^n x^n,
\end{aligned}$$

eine offenbar in vieler Rücksicht sehr merkwürdige Summation.

Für $x = 0$ und $\Delta x = 1$ erhält man hieraus die merkwürdige Gleichung

$$\begin{aligned}
&1.2.3.4\dots n \\
&= n^n - n_1(n-1)^n + n_2(n-2)^n - \dots + n_{n-2}(-1)^{n-2}.2^n + n_{n-1}(-1)^{n-1}.1^n.
\end{aligned}$$

§. 31.

Eine besonders wichtige Anwendung finden die beiden in §. 28. und §. 29. aufgelösten Aufgaben bei dem Interpoliren oder Einschalten.

Im Allgemeinen lässt sich das Interpolations-Problem auf folgende Art aussprechen:

Wenn mehrere, bestimmten Werthen der unabhängigen veränderlichen Grösse entsprechende Werthe einer ihrer Form nach unbekannten Function gegeben sind, eine Function zu finden, deren Werthe für dieselben Werthe der unabhängigen veränderlichen Grösse den gegebenen Werthen der unbekannten Function gleich sind.

Dass dieses Problem hauptsächlich auch für die Naturwissenschaften von der grössten Wichtigkeit ist, lässt sich leicht übersehen.

Seyen nämlich überhaupt x und y zwei in der Natur vorkommende Grössen, die auf eine gewisse Art von einander abhängig sind, so dass die eine aus der andern gefunden werden kann. Das Gesetz dieser Abhängigkeit sey unbekannt, man kenne aber eine gewisse Anzahl bestimmter durch Beobachtung gefundener zusammen gehörender Werthe von x und y , die wir durch

$$x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; x_4, y_4; \dots x_n, y_n$$

bezeichnen wollen. Lässt sich nun die Form einer Function $y = f(x)$ von x so bestimmen, dass

$$f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, f(x_3) = y_3, \dots f(x_n) = y_n$$

ist; so wird offenbar durch die Function $y = f(x)$ das allgemeine Gesetz der Abhängigkeit der Grössen x und y von einander mit desto grösserer Wahrscheinlichkeit ausgedrückt werden, je grösser die Anzahl der gegebenen durch Beobachtung gefundenen zusammen gehörenden Werthe von x und y ist. Zugleich wird diese Wahrscheinlichkeit augenscheinlich erhöht, wenigstens für den zwischen den Gränzen $x = x_1$ und $x = x_n$ liegenden Theil der unbekannten Function, wenn dieselbe zwischen den angegebenen Gränzen continuirlich ist, und die einzelnen gegebenen Werthe recht nahe bei einander, in einer möglichst stetigen Folge liegen. Dass mehr als Wahrscheinlichkeit auf diesem Wege nie zu erreichen ist, versteht sich von selbst; es ist aber auch bloss von einer empirischen Auffindung von Naturgesetzen die Rede, und es kommt vorzüglich darauf an, durch Vervielfältigung der Beobachtungen die Wahrscheinlichkeit so viel als möglich zu erhöhen.

§. 32.

Als der einfachste Fall der Interpolation ist der zu betrachten, wenn die gegebenen Werthe

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \dots x_n$$

von x , welchen die ebenfalls gegebenen Werthe

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \dots y_n$$

der ihrer Form nach unbekannten Function $y = f(x)$ entsprechen, in gleichen Abständen von einander liegen, oder, was dasselbe sagt, eine gewöhnliche arithmetische Reihe bilden. Bloss dieser Fall soll hier näher betrachtet werden.

Die Aufgabe ist, eine Function $y = f(x)$ von x von solcher Beschaffenheit zu finden, dass dieselbe, wenn man für x die Werthe

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \dots x_n$$

setzt, respective die Werthe

erhält. $y_1, y_2, y_3, y_4, \dots y_n$

Eine solche Function lässt sich auf folgende Art finden.

Nach §. 29. ist

$$y^{(n)} = y + n_1 \Delta y + n_2 \Delta^2 y + n_3 \Delta^3 y + \dots + n_n \Delta^n y,$$

oder, wenn wir der Kürze wegen $\Delta x = \alpha$ setzen,

$$f(x + n\alpha) = f(x) + n_1 \Delta f(x) + n_2 \Delta^2 f(x) + n_3 \Delta^3 f(x) + \dots + n_n \Delta^n f(x).$$

Für $n\alpha = k$ ist also, wie leicht erhellen wird,

$$f(x + k) = f(x) + \frac{k}{\alpha} \Delta f(x) + \frac{k(k-\alpha)}{1 \cdot 2 \alpha^2} \Delta^2 f(x) + \frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \alpha^3} \Delta^3 f(x) + \dots + \frac{k(k-\alpha) \dots (k-(n-1)\alpha)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \alpha^n} \Delta^n f(x),$$

oder, wenn wir $n-1$ für n setzen, d. i. für $k = (n-1)\alpha$:

$$f(x + k) = f(x) + \frac{k}{\alpha} \Delta f(x) + \frac{k(k-\alpha)}{1 \cdot 2 \alpha^2} \Delta^2 f(x) + \frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \alpha^3} \Delta^3 f(x) + \dots + \frac{k(k-\alpha) \dots (k-(n-2)\alpha)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \alpha^{n-1}} \Delta^{n-1} f(x).$$

Für $k = (n-1)\alpha$ ist also auch

$$f(x_1 + k) = f(x_1) + \frac{k}{\alpha} \Delta f(x_1) + \frac{k(k-\alpha)}{1 \cdot 2 \alpha^2} \Delta^2 f(x_1) + \frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \alpha^3} \Delta^3 f(x_1) + \dots + \frac{k(k-\alpha) \dots (k-(n-2)\alpha)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \alpha^{n-1}} \Delta^{n-1} f(x_1).$$

Lässt man nun α die Differenz der arithmetischen Reihe

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \dots x_n$$

bezeichnen; so ist

$$\begin{aligned} y_1 &= f(x_1), \\ y_2 &= f(x_2) = f(x_1 + \alpha), \\ y_3 &= f(x_3) = f(x_1 + 2\alpha), \\ y_4 &= f(x_4) = f(x_1 + 3\alpha), \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}$$

$$y_n = f(x_n) = f(x_1 + (n-1)\alpha).$$

Also ist nach §. 28.

$$\begin{aligned} f(x_1) &= y_1, \\ \Delta f(x_1) &= y_2 - y_1, \\ \Delta^2 f(x_1) &= y_3 - 2y_2 + y_1, \\ \Delta^3 f(x_1) &= y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1, \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}$$

$$\Delta^{n-1} f(x_1) = y_n - \frac{n-1}{1} y_{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} y_{n-2} - \dots + \frac{n-1}{1} y_2 - y_1,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden für $k = (n-1)\alpha$:

$$\begin{aligned}
 f(x_1+k) = & y_1 \\
 & + \frac{k}{\alpha} \{y_2 - y_1\} \\
 & + \frac{k(k-\alpha)}{1 \cdot 2\alpha^2} \{y_3 - 2y_2 + y_1\} \\
 & + \frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)}{1 \cdot 2 \cdot 3\alpha^3} \{y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1\} \\
 & \dots \dots \dots \\
 & + \frac{k(k-\alpha) \dots (k-(n-2)\alpha)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)\alpha^{n-1}} \left\{ y_n - \frac{n-1}{1} y_{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} y_{n-2} - \dots + y_1 \right\}.
 \end{aligned}$$

Da für
 $k = 0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, \dots, (n-1)\alpha$
 respective
 $x_1 + k = x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n$
 und folglich

$$\begin{aligned}
 f(x_1+k) &= f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4), \dots, f(x_n) \\
 &= y_1, y_2, y_3, y_4, \dots, y_n
 \end{aligned}$$

ist; so sieht man, dass die Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in obiger Gleichung für

$$k = 0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, \dots, (n-1)\alpha$$

respective die Werthe

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \dots, y_n$$

erhält.

Setzt man nun

$$k = x - x_1;$$

so ist für

$$x - x_1 = (n-1)\alpha$$

nach der obigen Gleichung

$$\begin{aligned}
 f(x) = & y_1 \\
 & + \frac{x-x_1}{\alpha} \{y_2 - y_1\} \\
 & + \frac{(x-x_1)(x-x_1-\alpha)}{1 \cdot 2\alpha^2} \{y_3 - 2y_2 + y_1\} \\
 & + \frac{(x-x_1)(x-x_1-\alpha)(x-x_1-2\alpha)}{1 \cdot 2 \cdot 3\alpha^3} \{y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1\} \\
 & \dots \dots \dots \\
 & + \frac{(x-x_1) \dots (x-x_1-(n-2)\alpha)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)\alpha^{n-1}} \left\{ y_n - \frac{n-1}{1} y_{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} y_{n-2} - \dots + y_1 \right\}.
 \end{aligned}$$

Für

$$k = 0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, \dots, (n-1)\alpha$$

ist respective

$$x = x_1, x_1 + \alpha, x_1 + 2\alpha, x_1 + 3\alpha, \dots, x_1 + (n-1)\alpha,$$

d. i.

$$x = x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n,$$

woraus, in Verbindung mit dem Vorhergehenden, nun auf der Stelle folgt, dass die Grösse auf der rechten Seite des Gleich-

heitszeichens in vorstehender Gleichung eine Function von x ist, welche für

$$x = x_1, x_2, x_3, x_4, \dots x_n$$

respective die Werthe

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \dots y_n$$

erhält, und daher den Bedingungen unserer Aufgabe vollständig genügt.

§. 33.

Um die Anwendung der im vorigen Paragraphen entwickelten Interpolations-Formel an einem Beispiele zu erläutern, wollen wir mittelst derselben unter der Voraussetzung, dass man bloss mit einer Tafel bis zur zehnten Bruchstelle berechneter Logarithmen der natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 versehen sey, den Logarithmus der Zahl

$$3,1415926536$$

berechnen, indem wir bei dieser Rechnung bloss bis zu den vierten Differenzen gehen.

Setzen wir der Kürze wegen

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= y_2 - y_1, \\ \Delta_2 &= y_3 - 2y_2 + y_1, \\ \Delta_3 &= y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1, \\ \Delta_4 &= y_5 - 4y_4 + 6y_3 - 4y_2 + y_1;\end{aligned}$$

so ist die Formel, nach welcher wir zu rechnen haben, folgende:

$$\begin{aligned}f(x) &= y_1 \\ &+ \frac{x - x_1}{\alpha} \Delta_1 \\ &+ \frac{(x - x_1)(x - x_1 - \alpha)}{1 \cdot 2 \alpha^2} \Delta_2 \\ &+ \frac{(x - x_1)(x - x_1 - \alpha)(x - x_1 - 2\alpha)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \alpha^3} \Delta_3 \\ &+ \frac{(x - x_1)(x - x_1 - \alpha)(x - x_1 - 2\alpha)(x - x_1 - 3\alpha)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \alpha^4} \Delta_4,\end{aligned}$$

oder, wenn wir die ganze zu y_1 addirte Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens durch Δ bezeichnen:

$$f(x) = y_1 + \Delta.$$

Bemerken wir nun bloss, dass die Zahlen der ersten Vertikalreihe in dem folgenden Rechnungs-Schema die Logarithmen der Zahlen

$$3,14; 3,15; 3,16; 3,17; 3,18$$

sind; so wird die ganze folgende Rechnung ohne weitere Erläuterung verständlich seyn.

0,4969296481	13809057	— 43769	277	— 3
0,4983105538	13765288	— 43492	274	
0,4996870826	13721796	— 43218		
0,5010592622	13678578			
0,5024271200				

Also ist

$$y_1 = 0,4969296481$$

$$\Delta_1 = + 0,0013809057$$

$$\Delta_2 = - 0,0000043769$$

$$\Delta_3 = + 0,0000000277$$

$$\Delta_4 = - 0,0000000003$$

Ferner ist

$$x = 3,1415926536$$

$$x_1 = 3,1400000000$$

$$x - x_1 = 0,0015926536$$

$$\alpha = 0,0100000000$$

Also ist

$$\frac{x - x_1}{\alpha} = 0,15926536$$

$$\frac{x - x_1 - \alpha}{2\alpha} = \frac{x - x_1}{2\alpha} - \frac{1}{2} = - 0,42036732$$

$$\frac{x - x_1 - 2\alpha}{3\alpha} = \frac{x - x_1}{3\alpha} - \frac{2}{3} = - 0,61357821$$

$$\frac{x - x_1 - 3\alpha}{4\alpha} = \frac{x - x_1}{4\alpha} - \frac{3}{4} = - 0,71018366.$$

Hieraus erhält man nach der obigen Formel

$$\Delta = 0,0002202245$$

und folglich

$$\log 3,1415926536 = \begin{cases} 0,4969296481 \\ + 0,0002202245 \\ \hline 0,4971498726. \end{cases}$$

In dieser Zahl ist noch die zehnte Bruchstelle richtig.

§. 34.

Wir schliessen dieses Kapitel mit einer kurzen Bemerkung über die Differenzen der Functionen mit mehrern von einander unabhängigen veränderlichen Grössen.

Lässt man in der Function

$$u = f(x, y, z, v, \dots)$$

die von einander unabhängigen veränderlichen Grössen $x, y, z, v, \dots$ sich respective um die beliebigen Grössen $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta v, \dots$ ändern; so geht u in

$$u^{(1)} = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, v + \Delta v, \dots)$$

über, und die Differenz

$$u^{(1)} - u$$

heisst die Differenz von u , und wird durch Δu bezeichnet, so dass also immer

$$\Delta u = u^{(1)} - u$$

$$= f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, v + \Delta v, \dots) - f(x, y, z, v, \dots)$$

ist.

Auf ganz ähnliche Art wie bei den Functionen mit einer

veränderlichen Grösse ist ferner, indem man $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta v, \dots$ immer als constant betrachtet,

$$\Delta^2 u = \Delta \Delta u, \Delta^3 u = \Delta \Delta^2 u, \Delta^4 u = \Delta \Delta^3 u, \Delta \Delta^5 u = \Delta \Delta^4 u, \dots,$$

d. i. allgemein

$$\Delta^{n+1} u = \Delta \Delta^n u.$$

$\Delta^{n+1} u$ wird aus $\Delta^n u$ erhalten, wenn man, die Grössen $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta v, \dots$ als constant betrachtend, in $\Delta^n u$ für $x, y, z, v, \dots$ respective $x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, v + \Delta v, \dots$ setzt, und von dem diesen veränderten Werthen von $x, y, z, v, \dots$ entsprechenden Werthe von $\Delta^n u$ den ursprünglichen oder primitiven Werth dieser Differenz, d. h. $\Delta^n u$ selbst abzieht.

Drittes Kapitel.

Von den Differentialen der Functionen mit einer veränderlichen Grösse.

A. Allgemeiner Begriff des Differentials einer Function mit einer veränderlichen Grösse.

§. 35.

Die Function $y = f(x)$ der einen veränderlichen Grösse x geht, wenn x sich um Δx ändert, in

$$y^{(1)} = f(x + \Delta x)$$

über, und es ist

$$\Delta y = y^{(1)} - y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Wenn nun die Function y , wie wir im Folgenden immer voraussetzen wollen, in der Nähe von x , welches jetzt als irgend ein bestimmter Werth der unabhängigen veränderlichen Grösse betrachtet wird, stetig ist, und daher auch für diesen Werth der unabhängigen veränderlichen Grösse einen reellen Werth hat; so nähert sich, wenn Δx sich der Null nähert, auch Δy der Null, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur Δx der Null nahe genug kommen lässt. Dessen ungeachtet kann, wenn Δx sich der Null nähert, der Quotient oder das Verhältniss

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

sich einer bestimmten endlichen Gränze immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade nähern.

Ist z. B. $y = ax^4$; so ist nach §. 15. und §. 16.

$$\Delta y = a(4x^3 + 6x^2 \Delta x + 4x \Delta x^2 + \Delta x^3) \Delta x,$$

und folglich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4ax^3 + 6ax^2 \Delta x + 4ax \Delta x^2 + a \Delta x^3.$$

Nähert nun Δx sich der Null, so nähern die drei letzten Glieder dieses Ausdrucks sich offenbar ebenfalls der Null, und können derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur Δx der Null nahe genug kommen lässt. Daher nähert sich, wenn Δx sich der Null nähert, der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

offenbar immer mehr und mehr der Grösse $4ax^3$ als seiner Gränze, und kann dieser Gränze auch beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur Δx nahe genug bei Null annimmt.

Ist nun wieder überhaupt $y = f(x)$; so heisst die Gränze, welcher sich, wenn Δx sich der Null nähert, das Differenzenverhältniss oder der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade nähert, in so fern es nämlich, was jederzeit besonders nachgewiesen werden muss, eine solche Gränze wirklich giebt, der Differentialquotient der Function y , und wird durch

$$\frac{\partial y}{\partial x}$$

bezeichnet.

Zu bemerken ist hierbei, dass dieses Symbol des Differentialquotienten immer als ein einfaches Symbol, nicht als das Symbol einer durch Division zweier andern Grössen durch einander entstandenen Grösse zu betrachten ist, indem dieses Symbol immer bloss die Gränze bezeichnet, welcher der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

sich immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade nähert, wenn Δx sich der Null nähert, in so fern es nämlich eine solche Gränze wirklich giebt.

Uebrigens hat es nicht an Vorschlägen zu andern Bezeichnungen des Differentialquotienten gefehlt. Unter diesen Bezeichnungen ist aber nur noch eine ihrer besondern Bequemlichkeit wegen in allgemeinen Gebrauch gekommen. Oft bezeichnet man nämlich den Differentialquotienten der Function y bloss durch y' , oder, wenn man $y = f(x)$ setzt, durch $f'(x)$. Auch wir werden uns dieser Bezeichnung, wo es die Bequemlichkeit fordert, im Folgenden zuweilen bedienen.

Für die oben als Beispiel gebrauchte Function $y = ax^4$ ist, wie aus dem Obigen hervorgeht,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 4ax^3 \text{ oder } y' = 4ax^3.$$

Absichtlich wiederholen wir hier noch einmal, dass im Folgenden, wenn nicht ausdrücklich etwas Anderes bemerkt wird, immer angenommen werden soll, dass jede zur Betrachtung gezogene Function der veränderlichen Grösse x in der Nähe von x , welches immer als ein beliebiger bestimmter Werth der unabhängigen veränderlichen Grösse gedacht werden muss, stetig sey, und daher auch für diesen bestimmten Werth der unabhängigen veränderlichen Grösse einen reellen Werth habe.

§. 36.

Das Product, welches man erhält, wenn man den Differentialquotienten der Function $y = f(x)$ der einen veränderlichen Grösse x mit der beliebigen Grösse Δx multiplicirt, heisst das Differential der Function y und wird durch ∂y bezeichnet, so dass also, jenachdem man sich der einen oder der andern der Bezeichnungen des Differentialquotienten, welche wir im vorigen Paragraphen kennen gelernt haben, bedient,

$$\partial y = \frac{\partial y}{\partial x} \Delta x = y' \Delta x = f'(x) \cdot \Delta x$$

ist.

Zu bemerken hat man hierbei noch, dass es gewöhnlich geworden ist, ∂x statt Δx zu schreiben, wobei man aber nicht aus den Augen verlieren darf, dass ∂x , wenn es allein steht, und nicht als ein Theil des Symbols des Differentialquotienten erscheint, jederzeit mit Δx völlig einerlei ist, und also, so wie Δx , immer eine ganz beliebige Grösse bezeichnet.

Setzt man nun ∂x statt Δx ; so ergiebt sich aus dem Obigen

$$\partial y = \frac{\partial y}{\partial x} \partial x = y' \partial x = f'(x) \cdot \partial x.$$

Für $y = ax^4$ ist nach dem vorigen Paragraphen

$$\partial y = 4ax^3 \partial x.$$

Der Differentialquotient wird, wie aus dem Vorhergehenden unmittelbar folgt, umgekehrt aus dem Differential erhalten, wenn man dieses durch ∂x dividirt.

Die Entwicklung der Differentiale aller Arten von Functionen, als analytischer Algorithmus gedacht, belegt man gewöhnlich mit dem allgemeinen Namen des Differentiirens, und die Wissenschaft, welche alle Arten von Functionen zu differentiren lehrt, ist die Differentialrechnung.

B. Einige die Entwicklung der Differentiale der zusammengesetzten Functionen betreffende, allgemeine Aufgaben.

§. 37.

Aufgabe. Wenn, indem a eine constante Grösse, p eine beliebige Function von x bezeichnet,

$$y = ap$$

ist, das Differential von y durch das Differential von p auszudrücken.

Auflösung. Nach §. 16. ist

$$\Delta y = a \Delta p$$

und folglich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a \frac{\Delta p}{\Delta x}$$

Nähert nun Δx sich der Null, so nähert nach dem allgemeinen Begriffe des Differentialquotienten $\frac{\Delta p}{\Delta x}$ sich der Gränze $\frac{\partial p}{\partial x}$ immer mehr und mehr, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur Δx der Null nahe genug kommen lässt.

Also nähert sich, wenn Δx sich der Null nähert, $a \frac{\Delta p}{\Delta x}$ oder $\frac{\Delta y}{\Delta x}$,

weil a eine constante Grösse ist, offenbar der Gränze $a \frac{\partial p}{\partial x}$

immer mehr und mehr und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur Δx der Null nahe genug kommen lässt.

Daher ist nach dem allgemeinen Begriffe des Differentialquotienten

$$1. \quad \frac{\partial y}{\partial x} = a \frac{\partial p}{\partial x},$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten mit ∂x multiplicirt,

$$\frac{\partial y}{\partial x} \partial x = a \frac{\partial p}{\partial x} \partial x,$$

d. i., weil nach dem allgemeinen Begriffe des Differentials

$$\partial y = \frac{\partial y}{\partial x} \partial x, \quad \partial p = \frac{\partial p}{\partial x} \partial x$$

ist,

$$2. \quad \partial y = a \partial p.$$

Weil $-y = -1 \cdot y$ ist; so ist hiernach auch immer $\partial(-y) = -1 \cdot \partial y$, d. i. $\partial(-y) = -\partial y$.

§. 38.

Aufgabe. Wenn, indem a eine beliebige constante Grösse ist, dagegen $p, q, s, \dots u$ beliebige Functionen von x bezeichnen,

$$y = a \pm p \pm q \pm s \pm \dots \pm u$$

ist, das Differential von y durch die Differentiale von $p, q, s, \dots u$ auszudrücken.

Auflösung. Nach §. 17. ist

$\Delta y = \pm \Delta p \pm \Delta q \pm \Delta s \pm \dots \pm \Delta u$
und folglich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \pm \frac{\Delta p}{\Delta x} \pm \frac{\Delta q}{\Delta x} \pm \frac{\Delta s}{\Delta x} \pm \dots \pm \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Nach dem allgemeinen Begriffe des Differentialquotienten nähern sich, wenn Δx sich der Null nähert,

$$\frac{\Delta p}{\Delta x}, \frac{\Delta q}{\Delta x}, \frac{\Delta s}{\Delta x}, \dots \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

respective den Gränzen

$$\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial s}{\partial x}, \dots \frac{\partial u}{\partial x}$$

immer mehr und mehr, und können denselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur Δx der Null nahe genug kommen lässt. Also nähert sich, wenn Δx sich der Null nähert, die Grösse

$$\pm \frac{\Delta p}{\Delta x} \pm \frac{\Delta q}{\Delta x} \pm \frac{\Delta s}{\Delta x} \pm \dots \pm \frac{\Delta u}{\Delta x},$$

d. i. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, der Gränze

$$\pm \frac{\partial p}{\partial x} \pm \frac{\partial q}{\partial x} \pm \frac{\partial s}{\partial x} \pm \dots \pm \frac{\partial u}{\partial x}$$

offenbar immer mehr und mehr und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur Δx der Null nahe genug kommen lässt. Daher ist nach dem allgemeinen Begriffe des Differentialquotienten

$$1. \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \pm \frac{\partial p}{\partial x} \pm \frac{\partial q}{\partial x} \pm \frac{\partial s}{\partial x} \pm \dots \pm \frac{\partial u}{\partial x},$$

und folglich

$$\frac{\partial y}{\partial x} \partial x = \pm \frac{\partial p}{\partial x} \partial x \pm \frac{\partial q}{\partial x} \partial x \pm \frac{\partial s}{\partial x} \partial x \pm \dots \pm \frac{\partial u}{\partial x} \partial x,$$

d. i. nach dem allgemeinen Begriffe des Differentials

$$2. \quad \partial y = \pm \partial p \pm \partial q \pm \partial s \pm \dots \pm \partial u.$$

§. 39.

Ganz auf ähnliche Art wie in §. 18. gezeigt worden ist, dass die Differenz jeder constanten Grösse $= 0$ zu setzen ist, lässt sich nun auch aus der im vorigen Paragraphen aufgelösten Aufgabe herleiten, dass das Differential jeder constanten Grösse ebenfalls $= 0$ zu setzen ist.

Ist nämlich, indem a eine beliebige constante Grösse, p eine Function von x bezeichnet,

$$y = a + p;$$

so ist nach §. 38.

$$\partial y = \partial p.$$

Ist aber überhaupt von einem Differential der Grösse a die Rede;

so betrachtet man dieselbe offenbar eigentlich als eine Function von x , und in dieser Beziehung ist also nach §. 38. auch

$$\partial y = \partial a + \partial p.$$

Durch Gleichsetzung der beiden gefundenen Ausdrücke von ∂y erhält man

$$\partial p = \partial a + \partial p$$

und hieraus

$$\partial a = 0.$$

Weil nach dem allgemeinen Begriffe des Differentials

$$\partial a = \frac{\partial a}{\partial x} \partial x$$

ist; so ist natürlich auch

$$\frac{\partial a}{\partial x} = 0.$$

§. 40.

Aufgabe. Wenn p und q Functionen von x sind und

$$y = pq$$

ist, das Differential von y durch die Differentiale von p und q auszudrücken.

Auflösung. Nach §. 20. ist

$$\Delta y = p \Delta q + q \Delta p + \Delta p \Delta q$$

und folglich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = p \frac{\Delta q}{\Delta x} + q \frac{\Delta p}{\Delta x} + \Delta p \frac{\Delta q}{\Delta x}.$$

Da nun, wenn Δx sich der Null nähert,

$$\frac{\Delta p}{\Delta x}, \frac{\Delta q}{\Delta x}, \Delta p$$

sich respective den Gränzen

$$\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial x}, 0$$

nähern, und denselben beliebig nahe gebracht werden können, wenn man nur Δx nahe genug bei Null annimmt; so nähern sich

$$p \frac{\Delta q}{\Delta x}, q \frac{\Delta p}{\Delta x}, \Delta p \frac{\Delta q}{\Delta x},$$

wenn Δx sich der Null nähert, offenbar respective den Gränzen

$$p \frac{\partial q}{\partial x}, q \frac{\partial p}{\partial x}, 0,$$

und können denselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur Δx der Null nahe genug kommen lässt. Also nähert sich, wenn Δx sich der Null nähert, die Grösse

$$p \frac{\Delta q}{\Delta x} + q \frac{\Delta p}{\Delta x} + \Delta p \frac{\Delta q}{\Delta x},$$

d. i. der Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, offenbar der Gränze

und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur Δx der Null nahe genug kommen lässt. Daher ist nach dem allgemeinen Begriffe des Differentialquotienten

$$1. \frac{\partial y}{\partial x} = p \frac{\partial q}{\partial x} + q \frac{\partial p}{\partial x},$$

und folglich

$$\frac{\partial y}{\partial x} \partial x = p \frac{\partial q}{\partial x} \partial x + q \frac{\partial p}{\partial x} \partial x,$$

d. i. nach dem allgemeinen Begriffe des Differentials

$$2. \partial y = p \partial q + q \partial p.$$

Angenommen wird hierbei, wie immer, dass alle Differentialquotienten endliche reelle völlig bestimmte Grössen sind.

Dividirt man auf beiden Seiten der Gleichung 2. mit $y = pq$; so erhält man

$$3. \frac{\partial y}{y} = \frac{\partial p}{p} + \frac{\partial q}{q},$$

welches eine vorzüglich elegante Form der in Rede stehenden Gleichung ist.

§. 41.

Für $y = pqr$, wo p, q, r Functionen von x bezeichnen, ist nach §. 40.

$$\frac{\partial y}{y} = \frac{\partial \cdot pq}{pq} + \frac{\partial r}{r},$$

und folglich

$$1. \frac{\partial y}{y} = \frac{\partial p}{p} + \frac{\partial q}{q} + \frac{\partial r}{r}.$$

Für $y = pqrs$, wo p, q, r, s Functionen von x bezeichnen, ist nach §. 40.

$$\frac{\partial y}{y} = \frac{\partial \cdot pqr}{pqr} + \frac{\partial s}{s},$$

und folglich nach 1.

$$2. \frac{\partial y}{y} = \frac{\partial p}{p} + \frac{\partial q}{q} + \frac{\partial r}{r} + \frac{\partial s}{s}.$$

Für $y = pqrst$, wo p, q, r, s, t Functionen von x bezeichnen, ist nach §. 40.

$$\frac{\partial y}{y} = \frac{\partial \cdot pqrs}{pqrs} + \frac{\partial t}{t},$$

und folglich nach 2.

$$3. \frac{\partial y}{y} = \frac{\partial p}{p} + \frac{\partial q}{q} + \frac{\partial r}{r} + \frac{\partial s}{s} + \frac{\partial t}{t}.$$

Auf diese Art weiter zu gehen, hat nicht die geringste Schwierigkeit.

§. 42.

Aufgabe. Wenn p und q Functionen von x sind und

$$y = \frac{p}{q}$$

ist, das Differential von y durch die Differentiale von p und q auszudrücken.

Auflösung. Nach §. 22. ist

$$\Delta y = \frac{q \Delta p - p \Delta q}{q(q + \Delta q)},$$

und folglich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{q \frac{\Delta p}{\Delta x} - p \frac{\Delta q}{\Delta x}}{q(q + \Delta q)}.$$

Lässt man nun Δx sich der Null nähern; so nähern

$$\frac{\Delta p}{\Delta x}, \frac{\Delta q}{\Delta x}, \Delta q$$

sich respective den Gränzen

$$\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial x}, 0,$$

und können denselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur Δx der Null nahe genug kommen lässt. Also nähern sich

$$q \frac{\Delta p}{\Delta x}, p \frac{\Delta q}{\Delta x}, q + \Delta q, q(q + \Delta q),$$

wenn Δx sich der Null nähert, offenbar respective den Gränzen

$$q \frac{\partial p}{\partial x}, p \frac{\partial q}{\partial x}, q, q^2,$$

und können denselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur Δx der Null nahe genug kommen lässt. Die Grösse

$$\frac{q \frac{\Delta p}{\Delta x} - p \frac{\Delta q}{\Delta x}}{q(q + \Delta q)},$$

d. i. der Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, nähert sich folglich, wenn Δx sich der Null nähert, offenbar der Gränze

$$\frac{q \frac{\partial p}{\partial x} - p \frac{\partial q}{\partial x}}{q^2},$$

und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur Δx der Null nahe genug kommen lässt. Daher ist nach dem allgemeinen Begriffe des Differentialquotienten

$$1. \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{q \frac{\partial p}{\partial x} - p \frac{\partial q}{\partial x}}{q^2},$$

und folglich

$$\frac{\partial y}{\partial x} \partial x = \frac{q \frac{\partial p}{\partial x} \partial x - p \frac{\partial q}{\partial x} \partial x}{q^2},$$

d. i. nach dem allgemeinen Begriffe des Differentials

$$2. \quad \partial y = \frac{q \partial p - p \partial q}{q^2}.$$

Bemerken kann man noch, dass sich diese Formel auch leicht aus der in §. 40. gefundenen Formel herleiten lässt.

Weil nämlich

$$y = \frac{p}{q}$$

ist; so ist

$$qy = p.$$

Also ist nach §. 40.

$$\partial p = q \partial y + y \partial q.$$

Bestimmt man aus dieser Gleichung ∂y ; so ergibt sich

$$\partial y = \frac{\partial p - y \partial q}{q},$$

und folglich, wenn man

$$y = \frac{p}{q}$$

setzt,

$$\partial y = \frac{q \partial p - p \partial q}{q^2},$$

ganz übereinstimmend mit dem Vorhergehenden.

§. 43.

Aufgabe. Wenn z eine Function von y und y eine Function von x ist, den Differentialquotienten der Function z in Bezug auf die unabhängige veränderliche Grösse x zu finden.

Auflösung. Man lasse x sich um Δx verändern, so ändert sich y um Δy , und diese Veränderung von y bringt dann ferner die Veränderung Δz von z hervor. Nähert sich nun Δx der Null; so nähert sich, wobei §. 35. zu vergleichen ist, auch Δy der Null und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur Δx nahe genug bei Null annimmt. Die Grenzen, denen sich die Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta z}{\Delta y} \text{ und } \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade nähern, wenn Δx sich der Null nähert, sind also nach dem allgemeinen Begriffe des Differentialquotienten respective

$$\frac{\partial z}{\partial y} \text{ und } \frac{\partial y}{\partial x},$$

wo bei dem ersten dieser beiden Differentialquotienten y als eine unabhängige veränderliche Grösse zu betrachten, und bei der Entwicklung dieses Differentialquotienten jederzeit wie eine solche zu behandeln ist.

Das Product

$$\frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

nähert sich folglich, wenn Δx sich der Null nähert, immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade der Gränze

$$\frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}$$

Da nun aber offenbar

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ist; so nähert sich auch der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta z}{\Delta x},$$

wenn Δx sich der Null nähert, immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade der Gränze

$$\frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$$

und nach dem allgemeinen Begriffe des Differentialquotienten ist folglich

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Der Sinn dieser Gleichung ist folgender: Wenn z eine Function von y , y eine Function von x ist, und der Differentialquotient von z in Bezug auf die unabhängige veränderliche Grösse x entwickelt werden soll; so braucht man bloss den Differentialquotienten

$$\frac{\partial z}{\partial y}$$

von z in Bezug auf y als unabhängige veränderliche Grösse, und den Differentialquotienten

$$\frac{\partial y}{\partial x}$$

von y in Bezug auf x als unabhängige veränderliche Grösse zu entwickeln. Dann wird jederzeit das Product

$$\frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$$

der gesuchte Differentialquotient von z in Bezug auf x als unabhängige veränderliche Grösse, d. i.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$$

seyn.

Für $z = ay^4$ und $y = cx^4$ ist z. B. nach §. 35.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4ay^3, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = 4cx^3.$$

Also ist nach dem Vorhergehenden

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = 16acx^3y^3,$$

oder, weil

ist, $y^3 = c^3x^{12}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 16ac^4x^{15},$$

und folglich nach dem allgemeinen Begriffe des Differentials

$$\partial z = 16ac^4x^{15}\partial x.$$

C. Differentiation der algebraischen Functionen.

§. 44.

Weil jede algebraische Function von x bloss mittelst der vier einfachen Rechnungsarten aus constanten Grössen und beliebigen Potenzen von x zusammengesetzt ist; so sind die in B. aufgelösten Aufgaben zur Entwicklung des Differentials einer jeden algebraischen Function offenbar völlig hinreichend, wenn man nur noch für jedes beliebige positive oder negative, ganze oder gebrochene n das Differential der Function $y = x^n$ entwickeln kann, wodurch wir also von selbst zu der folgenden Aufgabe geführt werden:

Aufgabe. Für jedes beliebige positive oder negative, ganze oder gebrochene n das Differential der Function $y = x^n$ zu finden.

Auflösung. I. Wenn n eine positive ganze Zahl ist, so ist nach §. 15.

$$\Delta y = n_1 x^{n-1} \Delta x + n_2 x^{n-2} \Delta x^2 + n_3 x^{n-3} \Delta x^3 + \dots + n_{n-1} x \Delta x^{n-1} + n_n \Delta x^n,$$

und folglich, weil $n_1 = n$ ist,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + n_2 x^{n-2} \Delta x + n_3 x^{n-3} \Delta x^2 + \dots + n_{n-1} x \Delta x^{n-2} + n_n \Delta x^{n-1}.$$

Lässt man nun Δx sich der Null nähern; so nähert sich offenbar die Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens der Grösse nx^{n-1} immer mehr und mehr, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur Δx der Null nahe genug kommen lässt. Daher nähert sich auch der Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, wenn Δx sich der Null nähert, der Grösse nx^{n-1} immer mehr und mehr, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur Δx nahe genug bei Null annimmt. Folglich

ist nach dem allgemeinen Begriffe des Differentialquotienten für jedes positive ganze n

$$\frac{\partial y}{\partial x} = nx^{n-1}.$$

II. Wenn n eine negative ganze Zahl ist, so sey $n = -m$, und folglich

$$y = \frac{1}{x^m}.$$

Weil m eine positive ganze Zahl ist, so ist nach I.

$$\frac{\partial \cdot x^m}{\partial x} = mx^{m-1}.$$

Differentiirt man nun die gebrochene Function

$$y = \frac{1}{x^m}$$

nach §. 42. und §. 39.; so erhält man

$$\frac{\partial y}{\partial x} = - \frac{1}{x^{2m}} \cdot \frac{\partial \cdot x^m}{\partial x}.$$

Folglich ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = - \frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = - mx^{-m-1};$$

also, wenn man wieder n für $-m$ setzt,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = nx^{n-1}.$$

III. In dem Falle, wo n ein positiver oder negativer Bruch ist, wollen wir

$$n = \frac{p}{q},$$

wo p und q ganze Zahlen sind, setzen, und wollen annehmen, dass dieser Bruch in den kleinsten Zahlen ausgedrückt sey.

Auch bemerken wir, dass, wenn q eine gerade Zahl ist, damit

$$y = x^{\frac{p}{q}}$$

reell sey, x immer als positiv angenommen werden muss.

Setzen wir nun

$$z = y^q = x^p;$$

so ist nach I. und II.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = qy^{q-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = px^{p-1}.$$

Nach §. 43. ist aber

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Also ist

$$px^{p-1} = qy^{q-1} \frac{\partial y}{\partial x},$$

und folglich

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{y^{q-1}}$$

oder

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1} y}{y^q} = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1} y}{x^p} = \frac{p}{q} \cdot \frac{y}{x};$$

also

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1} = nx^{n-1}.$$

In dem Falle, wo n ein in den kleinsten Zahlen ausgedrückter Bruch und der Nenner dieses Bruchs eine gerade Zahl ist, muss noch eine Bestimmung wegen des Vorzeichens gegeben werden, mit welchem man die Potenz x^{n-1} zu nehmen hat. Diese Bestimmung ergibt sich aber sehr leicht, wenn man nur bedenkt, dass nach dem Vorhergehenden

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{p}{q} \cdot \frac{y}{x} = n \frac{y}{x}$$

und folglich

$$x^{n-1} = \frac{y}{x}$$

ist. Weil nämlich in dem in Rede stehenden Falle x immer positiv seyn muss; so ergibt sich hieraus auf der Stelle, dass man die Potenz x^{n-1} immer mit demselben Vorzeichen nehmen muss, mit welchem man die Potenz $y = x^n$ genommen hat.

IV. Nach dem Vorhergehenden ist also für jedes positive oder negative, ganze oder gebrochene n

$$1. \frac{\partial y}{\partial x} = nx^{n-1}$$

und folglich nach dem allgemeinen Begriffe des Differentials

$$2. \partial y = nx^{n-1} \partial x.$$

Wenn n ein in den kleinsten Zahlen ausgedrückter Bruch, und der Nenner dieses Bruchs eine gerade Zahl ist; so muss x positiv seyn, und die Potenz x^{n-1} muss mit demselben Vorzeichen genommen werden, mit welchem man die Potenz $y = x^n$ genommen hat.

§. 45.

Wenn p eine Function von x und

$$y = p^n$$

ist; so ist nach §. 43.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Nach §. 44. ist aber

$$\frac{\partial y}{\partial p} = np^{n-1}.$$

Also ist

$$1. \quad \frac{\partial y}{\partial x} = np^{n-1} \frac{\partial p}{\partial x},$$

und folglich

$$\frac{\partial y}{\partial x} \partial x = np^{n-1} \frac{\partial p}{\partial x} \partial x,$$

d. i. nach dem allgemeinen Begriffe des Differentials

$$2. \quad \partial y = np^{n-1} \partial p,$$

wo natürlich ∂p das Differential der Function p in Bezug auf x als unabhängige veränderliche Grösse ist.

Wenn n ein in den kleinsten Zahlen ausgedrückter Bruch, und der Nenner dieses Bruchs eine gerade Zahl ist; so muss p positiv seyn, und die Potenz p^{n-1} muss mit demselben Vorzeichen genommen werden, mit welchem man die Potenz $y = p^n$ genommen hat.

§. 46.

Dass das Bisherige zur Differentiation jeder algebraischen Function völlig hinreicht, lässt sich nun leicht übersehen.

I. Jede ganze rationale algebraische Function hat die Form

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots + Lx^n.$$

Also ist nach §. 38., §. 37. und §. 44.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = B + 2Cx + 3Dx^2 + \dots + nLx^{n-1}$$

und

$$\partial y = (B + 2Cx + 3Dx^2 + \dots + nLx^{n-1}) \partial x.$$

II. Jede gebrochene rationale algebraische Function hat die Form

$$y = \frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots + Lx^n}{A' + B'x + C'x^2 + D'x^3 + \dots + L'x^m}.$$

Setzt man nun

$$p = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots + Lx^n,$$

$$q = A' + B'x + C'x^2 + D'x^3 + \dots + L'x^m;$$

so ist

$$y = \frac{p}{q},$$

und folglich nach §. 42.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{q \frac{\partial p}{\partial x} - p \frac{\partial q}{\partial x}}{q^2}.$$

Nach I. ist

$$\frac{\partial p}{\partial x} = B + 2Cx + 3Dx^2 + \dots + nLx^{n-1},$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = B' + 2C'x + 3D'x^2 + \dots + mL'x^{m-1};$$

also

$$q \frac{\partial p}{\partial x} = (A' + B'x + C'x^2 + \dots + L'x^m) (B + 2Cx + 3Dx^2 + \dots + nLx^{n-1}),$$

$$p \frac{\partial q}{\partial x} = (A + Bx + Cx^2 + \dots + Lx^n) (B' + 2C'x + 3D'x^2 + \dots + mL'x^{m-1}).$$

Entwickelt man nun diese Producte und das Quadrat

$q^2 = (A' + B'x + C'x^2 + D'x^3 + \dots + L'x^m)^2$ nach Potenzen von x , und führt die erhaltenen Ausdrücke in den obigen Ausdruck des Differentialquotienten von y ein; so erhält man den gesuchten Ausdruck dieses Differentialquotienten, welcher dann ferner, wenn man ihn mit ∂x multiplicirt, unmittelbar das Differential ∂y giebt.

Ist z. B.

$$y = \frac{a^2 - x^2}{a^4 + a^2x^2 + x^4};$$

so ist

$$p = a^2 - x^2, \quad q = a^4 + a^2x^2 + x^4;$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -2x, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = 2a^2x + 4x^3.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} q \frac{\partial p}{\partial x} - p \frac{\partial q}{\partial x} &= -2x(a^4 + a^2x^2 + x^4) - (a^2 - x^2)(2a^2x + 4x^3) \\ &= 2x(x^4 - 2a^2x^2 - 2a^4), \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x} &= \frac{2x(x^4 - 2a^2x^2 - 2a^4)}{(a^4 + a^2x^2 + x^4)^2}, \\ \partial y &= \frac{2x(x^4 - 2a^2x^2 - 2a^4)}{(a^4 + a^2x^2 + x^4)^2} \partial x, \end{aligned}$$

wo man nun, zufolge der vorher gegebenen allgemeinen Regel, das Quadrat im Nenner eigentlich noch nach Potenzen von x entwickeln müsste, welches man aber der Kürze wegen, wenn nicht besondere Zwecke diese Entwicklung fordern, gewöhnlich nicht thut.

III. Die Differentiation der irrationalen algebraischen Functionen wollen wir nur an ein Paar speciellen Fällen erläutern.

Ist z. B. die Function

$$y = x(a^2 - x^2) \sqrt{a^2 + x^2}$$

gegeben, so setze man

$$p = x(a^2 - x^2), \quad q = \sqrt{a^2 + x^2};$$

folglich $y = pq$. Nach §. 40 ist

$$\partial y = p \partial q + q \partial p.$$

Nach §. 45. erhält man

$$\partial q = \partial \cdot (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \partial x = \frac{x \partial x}{\sqrt{a^2 + x^2}},$$

und nach I. ist

$$\partial p = \partial (a^2 x - x^3) = (a^2 - 3x^2) \partial x.$$

Also ist

$$\begin{aligned} \partial y &= \frac{x^2 (a^2 - x^2) \partial x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + (a^2 - 3x^2) \frac{\partial x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \\ &= \frac{x^2 (a^2 - x^2) + (a^2 - 3x^2) (a^2 + x^2)}{\sqrt{a^2 + x^2}} \partial x; \end{aligned}$$

folglich nach gehöriger Entwicklung des Zählers

$$\partial y = \frac{(a^4 - a^2 x^2 - 4x^4) \partial x}{\sqrt{a^2 + x^2}},$$

und hieraus ferner

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a^4 - a^2 x^2 - 4x^4}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Ist

$$y = a + \frac{b}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{c}{\sqrt[3]{x}} + \frac{e}{x^2},$$

die gegebene Function; so setze man

$$y = a + bx^{-\frac{2}{3}} - cx^{-\frac{1}{3}} + ex^{-2},$$

und erhält nun nach §. 38., §. 37. und §. 44. sehr leicht

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{2}{3} bx^{-\frac{2}{3}-1} + \frac{1}{3} cx^{-\frac{1}{3}-1} - 2ex^{-2-1}$$

$$= -\frac{2}{3} bx^{-\frac{5}{3}} + \frac{1}{3} cx^{-\frac{4}{3}} - 2ex^{-3}$$

$$= -\frac{2b}{3\sqrt[3]{x^5}} + \frac{4c}{3\sqrt[3]{x^7}} - \frac{2e}{x^3}$$

$$= -\frac{2b}{3x\sqrt[3]{x^2}} + \frac{4c}{3x^2\sqrt[3]{x}} - \frac{2e}{x^3};$$

also

$$\partial y = -\frac{2b\partial x}{3x\sqrt[3]{x^2}} + \frac{4c\partial x}{3x^2\sqrt[3]{x}} - \frac{2e\partial x}{x^3}.$$

D. Differentiale der Exponential-Functionen.

§. 47.

Indem wir jetzt zur Betrachtung der Exponential-Function

$$y = a^x$$

übergehen, bemerken wir zuvörderst, dass im Folgenden die Grösse a immer als positiv angenommen werden soll, damit, wie

sich auch x ändern möge, y stets reell sey. Auch soll a nicht $= 0$ seyn.

Nach §. 10. 3. ist

$$\Delta y = a^x (a^{\Delta x} - 1),$$

und folglich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Da es nun, wenn man vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten übergehen will, jederzeit darauf ankommt, ob sich der Differenzenquotient, wenn Δx sich der Null nähert, immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade einer gewissen bestimmten endlichen Gränze nähert; so werden wir uns jetzt zunächst offenbar mit der Untersuchung zu beschäftigen haben, ob sich die Grösse

$$\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x},$$

wenn Δx sich der Null nähert, immer mehr und mehr einer gewissen bestimmten endlichen Gränze nähert, und derselben beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur Δx der Null nahe genug kommen lässt.

Findet sich dann, dass es eine solche Gränze wirklich giebt; so kann dieselbe natürlich nicht mehr von Δx abhängen, sondern wird bloss eine Function von a seyn, und kann daher durch $\varphi(a)$ bezeichnet werden.

Unter dieser Voraussetzung ist die Gränze, welcher, wenn Δx sich der Null nähert, der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

sich immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade nähert, offenbar das Product $a^x \cdot \varphi'(a)$, und folglich nach dem allgemeinen Begriffe des Differentialquotienten

$$\frac{\partial y}{\partial x} = a^x \cdot \varphi(a).$$

Indem wir uns nun zu der oben näher angedeuteten Untersuchung wenden, wollen wir jedoch der Kürze wegen, welches offenbar verstatet ist, statt der Grösse

$$\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

die Function

$$y = \frac{a^x - 1}{x}$$

betrachten, und wollen folglich untersuchen, ob es eine endliche völlig bestimmte Gränze giebt, welcher sich diese Function, wenn x sich der Null nähert, immer mehr und mehr, und auch, wenn man nur x der Null nahe genug kommen lässt, bis zu jedem beliebigen Grade nähert.

Die oben in Bezug auf die Grösse a gemachten Voraussetzungen behalten auch hierbei ihre völlige Gültigkeit.

§. 48.

Lehrsatz. Wenn x sich der Null nähert; so nähert die Grösse a^x sich immer mehr und mehr der Einheit, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur x der Null nahe genug kommen lässt.

Beweis. I. Wenn $a > 1$ und x positiv ist, so ist $a^x > 1$. Setzt man also die Potenzen

$$\frac{1}{a^{2^n}}, \quad \frac{1}{a^{2^{n+1}}}, \quad \frac{1}{a^{2^{n+2}}}, \quad \frac{1}{a^{2^{n+3}}}, \quad \frac{1}{a^{2^{n+4}}}, \dots,$$

wo n eine positive ganze Zahl bezeichnen soll, nach der Reihe den Grössen

$$1 + \Delta, \quad 1 + \Delta_1, \quad 1 + \Delta_2, \quad 1 + \Delta_3, \quad 1 + \Delta_4, \dots$$

gleich; so sind $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \dots$ sämtlich positive Grössen, und keine derselben ist $= 0$. Es ist aber

$$(1 + \Delta_1)^2 = 1 + \Delta$$

oder

$$2\Delta_1 + \Delta_1^2 = \Delta,$$

und folglich

$$\Delta_1 = \frac{\Delta}{2 + \Delta_1};$$

also

$$\Delta_1 < \frac{1}{2} \Delta.$$

Auf diese Art hat man überhaupt

$$\Delta_1 < \frac{1}{2} \Delta, \quad \Delta_2 < \frac{1}{2} \Delta_1, \quad \Delta_3 < \frac{1}{2} \Delta_2, \quad \Delta_4 < \frac{1}{2} \Delta_3, \dots$$

oder

$$\Delta_1 < \frac{1}{2} \Delta, \quad \Delta_2 < \frac{1}{4} \Delta, \quad \Delta_3 < \frac{1}{8} \Delta, \quad \Delta_4 < \frac{1}{16} \Delta, \dots,$$

und sieht hieraus, dass sich die Grössen

$$\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \dots$$

der Null immer mehr und mehr nähern, und derselben beliebig nahe gebracht werden können, wenn man vorstehende Reihe nur weit genug fortsetzt.

Also nähern sich die Grössen

$$1 + \Delta, \quad 1 + \Delta_1, \quad 1 + \Delta_2, \quad 1 + \Delta_3, \quad 1 + \Delta_4, \dots,$$

d. i. die Grössen

$$\frac{1}{a^{2^n}}, \quad \frac{1}{a^{2^{n+1}}}, \quad \frac{1}{a^{2^{n+2}}}, \quad \frac{1}{a^{2^{n+3}}}, \quad \frac{1}{a^{2^{n+4}}},$$

immer mehr und mehr der Einheit, und können derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man vorstehende Reihe nur weit genug fortsetzt.

Folglich nähert sich in dem vorliegenden Falle, wo $a > 1$ und x positiv ist, die Grösse a^x , wenn x sich der Null nähert, der Einheit offenbar immer mehr und mehr, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur x nahe genug bei Null annimmt.

II. Da nun aber ferner

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

ist, und nach I. der Nenner dieses Bruchs, unter der Voraussetzung, das $a > 1$ ist, sich immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade der Einheit nähert, wenn x sich der Null nähert; so gilt dies offenbar auch von dem obigen Bruche selbst, und es ist daher hierdurch die Richtigkeit unsers Satzes auch in dem Falle bewiesen, wo $a > 1$ und x negativ ist.

III. Wenn $a < 1$ ist, so setze man

$$\frac{1}{a} = \alpha, \quad \frac{1}{a^x} = \alpha^x.$$

Dann ist $\alpha > 1$, und nach I. und II. nähert sich, wenn x sich der Null nähert, α^x , d. i. $\frac{1}{a^x}$, immer mehr und mehr der Einheit, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur x nahe genug bei Null annimmt. Da nun dies offenbar auch von dem Nenner des Bruchs $\frac{1}{a^x}$, weil der Zähler desselben die Einheit ist, gelten muss; so wird sich also a^x auch in dem Falle, wo $a < 1$ ist, immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade der Einheit nähern, wenn x sich der Null nähert.

IV. Weil nun endlich für $a = 1$ immer $a^x = 1$ ist; so ist klar, dass der Satz auch in diesem Falle als gültig zu betrachten ist, und derselbe ist daher durch das Vorhergehende nun in völliger Allgemeinheit bewiesen.

§. 49.

Lehrsatz. Für keinen von Null verschiedenen Werth der Grösse x findet eine Unterbrechung der Stetigkeit der Function

$$y = \frac{a^x - 1}{x}$$

Statt.

Beweis. Man lasse x sich um Δx verändern; so erhält man

$$\Delta y = \frac{a^{x+\Delta x} - 1}{x + \Delta x} - \frac{a^x - 1}{x},$$

und hieraus nach leichter Rechnung

$$\Delta y = \frac{a^x (a^{\Delta x} - 1) - \frac{a^x - 1}{x} \Delta x}{x + \Delta x}.$$

Lässt man nun Δx sich der Null nähern; so nähert nach §. 48. $a^{\Delta x}$ sich immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade der Einheit, und $a^{\Delta x} - 1$, also auch $a^x (a^{\Delta x} - 1)$, nähert sich folglich offenbar immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade der Null. Eben so nähert sich, wenn Δx sich der Null nähert, das Product

$$\frac{a^x - 1}{x} \Delta x,$$

dessen erster Factor, weil x nach der Voraussetzung nicht $= 0$ ist, eine endliche völlig bestimmte Grösse ist, immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade der Null. Folglich nähert sich offenbar auch der Zähler des Bruchs

$$\frac{a^x (a^{\Delta x} - 1) - \frac{a^x - 1}{x} \Delta x}{x + \Delta x},$$

wenn Δx sich der Null nähert, immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade der Null. Da nun der Nenner $x + \Delta x$ sich, wenn Δx sich der Null nähert, immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade der völlig bestimmten von Null verschiedenen Grösse x nähert; so nähert sich der obige Bruch, d. i. Δy , wenn Δx sich der Null nähert, offenbar immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade der Null, wodurch, weil die Function

$$y = \frac{a^x - 1}{x}$$

offenbar auch für jedes x , welches nicht $= 0$ ist, einen endlichen völlig bestimmten Werth hat, der zu beweisende Satz offenbar vollständig bewiesen ist.

§. 50.

Lehrsatz. Wenn $a > 1$ und x positiv ist; so ist die Function

$$y = \frac{a^x - 1}{x}$$

stets positiv, und nimmt fortwährend ab, wenn x abnimmt.

Beweis. I. Dass unter den gemachten Voraussetzungen y stets positiv ist, erhellet auf der Stelle, und bedarf daher keines besondern Beweises.

II. Um aber ferner zu beweisen, dass die Function y mit x zugleich fortwährend abnimmt, wollen wir zuerst zwey positive ganze Zahlen m und n betrachten, und wollen, unter der Voraussetzung, dass $n < m$ ist, zeigen, dass jederzeit

$$\frac{a^n - 1}{n} < \frac{a^m - 1}{m},$$

oder dass, wenn wir $a = 1 + \theta$ setzen, wo $\theta > 0$ ist, jederzeit

$$\frac{(1 + \theta)^n - 1}{n} < \frac{(1 + \theta)^m - 1}{m}$$

ist.

Nach dem Binomischen Lehrsatz (§. 14.) ist

$$(1 + \theta)^n = 1 + n_1 \theta + n_2 \theta^2 + n_3 \theta^3 + \dots + n_n \theta^n,$$

$$(1 + \theta)^m = 1 + m_1 \theta + m_2 \theta^2 + m_3 \theta^3 + \dots + m_m \theta^m;$$

folglich

$$(1 + \theta)^n - 1 = n_1 \theta + n_2 \theta^2 + n_3 \theta^3 + \dots + n_n \theta^n,$$

$$(1 + \theta)^m - 1 = m_1 \theta + m_2 \theta^2 + m_3 \theta^3 + \dots + m_m \theta^m.$$

Nun ist aber allgemein

$$n_k = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} = \frac{n}{k} \cdot \frac{(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (k-1)},$$

d. i.

$$n_k = \frac{n}{k} \cdot (n-1)_{k-1},$$

und folglich

$$\frac{n_k}{n} = \frac{(n-1)_{k-1}}{k}.$$

Also ist

$$\frac{(1 + \theta)^n - 1}{n} = \theta + \frac{(n-1)_1}{2} \theta^2 + \frac{(n-1)_2}{3} \theta^3 + \dots + \frac{(n-1)_{n-1}}{n} \theta^n,$$

$$\frac{(1 + \theta)^m - 1}{m} = \theta + \frac{(m-1)_1}{2} \theta^2 + \frac{(m-1)_2}{3} \theta^3 + \dots + \frac{(m-1)_{m-1}}{m} \theta^m.$$

Die Glieder dieser beiden Reihen sind, wie leicht erhellen wird, sämtlich positiv, und die erste Reihe hat, weil nach der Voraussetzung $n < m$ ist, jederzeit eine geringere Anzahl von Gliedern wie die zweite Reihe. Ferner ist, weil $n < m$ ist, jedes Glied der ersten Reihe offenbar kleiner wie das gleichstellige Glied der zweiten Reihe, wenn man nur die beiden ersten Glieder ausnimmt, welche einander gleich sind. Daher hat augenscheinlich die erste Reihe jederzeit eine kleinere Summe wie die zweite, und es ist folglich

$$\frac{(1 + \theta)^n - 1}{n} < \frac{(1 + \theta)^m - 1}{m},$$

wie bewiesen werden sollte.

III. Hiernach lässt sich nun ferner leicht zeigen, dass unter der Voraussetzung, dass

$$\frac{n}{p} < \frac{m}{q}$$

ist, jederzeit auch

$$\frac{(1+\theta)^{\frac{n}{p}} - 1}{\frac{n}{p}} < \frac{(1+\theta)^{\frac{m}{q}} - 1}{\frac{m}{q}}$$

ist. Dies wird bewiesen seyn, wenn man zeigen kann, dass unter der gemachten Voraussetzung

$$\frac{(1+\theta)^{\frac{nq}{pq}} - 1}{\frac{nq}{pq}} < \frac{(1+\theta)^{\frac{mp}{pq}} - 1}{\frac{mp}{pq}}$$

ist. Dies lässt sich aber auf folgende Art beweisen. Weil

$$(1+\theta)^{\frac{1}{pq}} > 1$$

ist; so setze man

$$(1+\theta)^{\frac{1}{pq}} = 1 + \theta',$$

wo $\theta' > 0$ ist. Da nun nach der Voraussetzung

$$\frac{n}{p} < \frac{m}{q}$$

ist; so ist $nq < mp$, und folglich nach II.

$$\frac{(1+\theta')^{nq} - 1}{nq} < \frac{(1+\theta')^{mp} - 1}{mp}.$$

Aber

$$(1+\theta')^{nq} = (1+\theta)^{\frac{nq}{pq}}, \quad (1+\theta')^{mp} = (1+\theta)^{\frac{mp}{pq}};$$

folglich

$$\frac{(1+\theta)^{\frac{nq}{pq}} - 1}{nq} < \frac{(1+\theta)^{\frac{mp}{pq}} - 1}{mp};$$

also offenbar auch

$$\frac{(1+\theta)^{\frac{nq}{pq}} - 1}{\frac{nq}{pq}} < \frac{(1+\theta)^{\frac{mp}{pq}} - 1}{\frac{mp}{pq}},$$

wie bewiesen werden sollte.

IV. Durch I., II. und III. ist unser Satz nun offenbar vollständig bewiesen.

§. 51.

Lehrsatz. Wenn $a > 1$ und x positiv ist; so nähert sich, wenn x sich der Null nähert, die Function

$$y = \frac{a^x - 1}{x}$$

immer mehr und mehr einer gewissen endlichen völlig bestimmten Gränze, und kann derselben beliebig

nahe gebracht werden, wenn man nur x der Null nahe genug kommen lässt. Auch ist diese Gränze jederzeit eine positive Grösse.

Beweis. Dieser Satz ist, wie man sogleich übersehen wird, eine unmittelbare Folge aus den beiden in §. 49. und §. 50. bewiesenen Sätzen.

§. 52.

Lehrsatz. Wenn $a > 1$ und x positiv ist; so nähern sich, wenn x sich der Null nähert, die beiden Functionen

$$y = \frac{a^x - 1}{x}, \quad z = \frac{a^{-x} - 1}{-x}$$

einander immer mehr und mehr, und können einander bis zu jedem beliebigen Grade genähert werden, wenn man nur x der Null nahe genug kommen lässt.

Beweis. Es ist, wie man leicht findet,

$$y - z = \frac{a^x - 1}{x} \left(1 - \frac{1}{a^x}\right).$$

Nähert sich nun x der Null; so nähert nach §. 51. die Grösse

$$\frac{a^x - 1}{x}$$

sich einer bestimmten endlichen Gränze immer mehr und mehr, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur x der Null nahe genug kommen lässt. Die Grösse

$$1 - \frac{1}{a^x}$$

nähert sich nach §. 48., wenn x sich der Null nähert, der Null offenbar immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade. Also nähert sich offenbar, wenn x sich der Null nähert, das Product

$$\frac{a^x - 1}{x} \left(1 - \frac{1}{a^x}\right),$$

d. i. die Differenz $y - z$, der Null immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade, wodurch unser Satz, wie leicht erhellen wird, bewiesen ist.

§. 53.

Lehrsatz. Wenn $a > 1$ ist; so nähert sich, wenn x sich der Null nähert, die Function

$$y = \frac{a^x - 1}{x},$$

x mag positiv oder negativ seyn, immer mehr und

mehr einer gewissen bestimmten endlichen Gränze, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur x der Null nahe genug kommen lässt.

Beweis. Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge aus den in §. 51. und §. 52. bewiesenen Sätzen.

§. 54.

Lehrsatz. Auch wenn $a < 1$ ist nähert sich, wenn x sich der Null nähert, die Function

$$y = \frac{a^x - 1}{x}$$

immer mehr und mehr einer gewissen bestimmten endlichen Gränze, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur x der Null nahe genug kommen lässt.

Beweis. Man setze

$$\frac{1}{a} = \alpha;$$

so ist, weil $a < 1$ ist, $\alpha > 1$. Nun ist, wie man leicht findet,

$$\frac{a^x - 1}{x} = - \frac{\alpha^x - 1}{x} \cdot \frac{1}{a^x},$$

und nach §. 53. nähert sich, wenn x sich der Null nähert, die Grösse

$$\frac{\alpha^x - 1}{x}$$

immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade einer gewissen bestimmten endlichen Gränze. Also nähert sich, wenn x sich der Null nähert, auch das Product

$$\frac{a^x - 1}{x} \cdot \frac{1}{a^x}$$

immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade einer gewissen bestimmten endlichen Gränze. Nach §. 48. nähert sich aber $\frac{1}{a^x}$, wenn x sich der Null nähert, immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade der Einheit. Also muss sich, wenn x sich der Null nähert, offenbar auch

$$\frac{a^x - 1}{x}$$

immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade einer gewissen bestimmten endlichen Gränze nähern, wie bewiesen werden sollte.

§. 55.

Verbindet man mit den in §. 53. und §. 54. bewiesenen

Sätzen nun blossnoch die Bemerkung, dass, wenn $a = 1$ ist, für jedes x , welches nicht $= 0$ ist,

$$\frac{a^x - 1}{x} = 0$$

ist; so ergibt sich auf der Stelle das folgende wichtige allgemeine Theorem:

Für jedes nicht verschwindende positive a nähert sich, wenn x sich der Null nähert, die Function

$$y = \frac{a^x - 1}{x}$$

einer gewissen bestimmten endlichen Gränze immer mehr und mehr, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur x der Null nahe genug kommen lässt.

Die Existenz einer solchen Gränze ist also hierdurch ausser allem Zweifel gesetzt, und wenn auch die wirkliche Bestimmung derselben spätern Untersuchungen überlassen bleiben muss; so ist doch so viel klar, dass diese Gränze nicht von x abhängen, sondern bloss eine Function von a seyn kann, weshalb wir dieselbe, wie auch schon in §. 47. geschehen ist, durch $\varphi(a)$ bezeichnen wollen. Dass nun auch die Grösse

$$\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

sich, wenn Δx sich der Null nähert, der Gränze $\varphi(a)$ immer mehr und mehr nähert, und derselben beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur Δx nahe genug bei Null annimmt, versteht sich von selbst, und in §. 47. ist auch schon gezeigt worden, dass für die Function

$$y = a^x$$

der Differentialquotient

$$\frac{\partial y}{\partial x} = a^x \varphi(a),$$

folglich

$$\partial y = a^x \varphi(a) \partial x$$

ist.

§. 56.

Die wirkliche Bestimmung der Function $\varphi(a)$ bleibt, wie schon erinnert worden ist, spätern Untersuchungen vorbehalten, indem es uns für jetzt völlig genügt, dass wir uns von der Existenz der durch $\varphi(a)$ bezeichneten Gränze versichert haben. Jedoch bieten sich uns schon jetzt die folgenden in mehrfacher Beziehung wichtigen, und daher wohl zu beachtenden Bemerkungen dar.

Weil $\varphi(a)$ eine Function von a ist; so wird sich der Werth von $\varphi(a)$ ändern, wenn a sich ändert, und jedem bestimmten

Werthe von a wird im Allgemeinen ein bestimmter Werth von $\varphi(a)$, so wie umgekehrt jedem bestimmten Werthe von $\varphi(a)$ ein bestimmter Werth von a entsprechen, womit aber nicht gesagt seyn soll, dass $\varphi(a)$ auch wirklich jeden bestimmten reellen Werth haben kann. Wir wollen nun aber annehmen, dass die Einheit ein Werth der Function $\varphi(a)$ seyn könne, behalten uns jedoch vor, erst weiter unten, wo wir auf diesen wichtigen Gegenstand zurückkommen werden, zu entscheiden, ob diese Annahme, die wir für jetzt als zulässig betrachten wollen, wirklich zulässig oder unzulässig ist. Dies vorausgesetzt, wollen wir, wie dies in der Analysis allgemein gebräuchlich ist, den Werth der Grösse a , für welchen die Function $\varphi(a)$ der Einheit gleich wird, durch den Buchstaben e bezeichnen, so dass also e eine solche Grösse ist, dass

$$\varphi(e) = 1$$

ist, wobei es aber, obgleich wir e als eine reelle Grösse betrachten werden, für jetzt ebenfalls völlig unentschieden bleibt, ob diese Grösse wirklich reell oder imaginär ist, so wie denn überhaupt auch von der wirklichen Bestimmung der Grösse e erst weiter unten ausführlich die Rede seyn wird.

Gewöhnlich betrachtet man e als die Basis eines logarithmischen Systems, und nennt die sich auf diese Basis beziehenden Logarithmen natürliche oder hyperbolische Logarithmen, e selbst aber eben deshalb die Basis der natürlichen oder hyperbolischen Logarithmen, wobei man zugleich noch zu merken hat, dass man die natürlichen oder hyperbolischen Logarithmen bloss durch den Buchstaben l zu bezeichnen pflegt, eine Bezeichnung, die auch in diesem Werke ihrer Einfachheit wegen durchgängig beibehalten werden soll.

§. 57.

Die in §. 55. bewiesene wichtige Differentialformel

$$\partial . a^x = a^x \varphi(a) \partial x$$

lässt sich mittelst der natürlichen Logarithmen, deren Begriff im vorigen Paragraphen entwickelt worden ist, nun noch auf einen andern Ausdruck bringen.

Setzt man in der in Rede stehenden Formel e für a ; so erhält man die Gleichung

$$\partial . e^x = e^x \varphi(e) \partial x.$$

Nach §. 56. ist aber

$$\varphi(e) = 1.$$

Also ist

$$1. \quad \partial . e^x = e^x \partial x.$$

Nach dem allgemeinen Begriffe der Logarithmen ist, wobei wegen der Bezeichnung der vorige Paragraph zu vergleichen,

$$a = e^{la};$$

folglich

oder, wenn wir

setzen,

$$a^x = e^{x \log a},$$

$$2. \quad x \log a = z$$

$$3. \quad a^x = e^z.$$

Nach dem in §. 43. bewiesenen Satze ist also

$$\frac{\partial a^x}{\partial x} = \frac{\partial e^z}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x},$$

und folglich, weil nach 1. und 2.

$$\partial e^z = e^z \partial z, \quad \partial z = \log a \partial x$$

oder

$$\frac{\partial e^z}{\partial z} = e^z, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \log a$$

ist,

$$\frac{\partial a^x}{\partial x} = e^z \log a,$$

d. i. nach 3.

$$\frac{\partial a^x}{\partial x} = a^x \log a$$

oder

$$4. \quad \partial a^x = a^x \log a \partial x.$$

Weil nun aber auch

$$\partial a^x = a^x \varphi(a) \partial x$$

ist; so ist

$$5. \quad \varphi(a) = \log a,$$

wodurch wir zugleich noch einen andern Ausdruck der Function $\varphi(a)$ gefunden haben, der freilich für jetzt auch weiter nichts als ein blosser symbolischer Ausdruck, für das Folgende aber von nicht geringer Wichtigkeit ist.

§. 58.

Wichtig ist es auch noch für das Folgende, den Zusammenhang zwischen den natürlichen und den sich auf die Basis b beziehenden Logarithmen, die wir nach §. 4. durch $\log$ bezeichnen, zu ermitteln.

Zu dem Ende sey N eine beliebige Zahl; so ist bekanntlich

$$N = b^{\log N} \text{ und } N = e^{lN},$$

woraus

$$b^{\log N} = e^{lN}$$

folgt. Nimmt man nun auf beiden Seiten dieser Gleichung zuerst die durch $\log$ bezeichneten, dann die natürlichen Logarithmen; so erhält man die beiden Gleichungen

$$\log N \cdot \log b = lN \cdot \log e$$

und

$$\log N \cdot lb = lN \cdot le,$$

d. i., weil bekanntlich

$$\log b = 1, \log e = 1$$

ist,

$$\log N = l N \cdot \log e$$

und

$$\log N \cdot l b = l N ;$$

folglich

$$\log N = \log e \cdot l N = \frac{1}{l b} l N ,$$

oder, wenn man

$$M = \log e = \frac{1}{l b}$$

setzt,

$$\log N = M l N ,$$

so dass man also die natürlichen Logarithmen mit der Grösse M multipliciren muss, um die der Basis b entsprechenden Logarithmen zu erhalten. Die Grösse M ist daher für jedes logarithmische System von der grössten Wichtigkeit, und deshalb auch mit einem besondern Namen, nämlich mit dem Namen des Modulus des logarithmischen Systems, dessen Basis die Grösse b ist, belegt worden. Kennt man die natürlichen Logarithmen und den Modulus eines beliebigen Systems; so ist es jederzeit leicht, alle Logarithmen dieses Systems zu finden.

Bemerkenswerth ist endlich auch noch die aus dem Obigen sich unmittelbar ergebende Gleichung

$$\log e \cdot l b = 1.$$

E. Differentiale der logarithmischen Functionen.

§. 59.

Die gegebene Function sey

$$y = \log x ,$$

wobei wir x als positiv annehmen; so ist nach dem allgemeinen Begriffe der Logarithmen

$$x = b^y ,$$

und folglich nach dem in §. 43. bewiesenen Satze

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\partial \cdot b^y}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} .$$

Aber

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1$$

und nach §. 57.

$$\frac{\partial \cdot b^y}{\partial y} = b^y l b = x l b .$$

Also

$$1 = x l b \cdot \frac{\partial y}{\partial x} ,$$

und folglich

$$1. \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{x \log b}, \quad \partial y = \frac{\partial x}{x \log b},$$

oder nach §. 58.

$$2. \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\log e}{x}, \quad \partial y = \frac{\log e}{x} \partial x.$$

Für die Function

$$y = \log x,$$

wo x ebenfalls immer als positiv angenommen wird, ist $b = e$, $\log b = 1$, und folglich nach 1.

$$3. \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{x}, \quad \partial y = \frac{\partial x}{x}.$$

Diese sehr einfachen Formeln werden im Folgenden häufige Anwendung finden.

F. Differentiale der Kreis-Functionen.

§. 60.

Für $y = \sin x$ ist nach §. 10. 4.

$$\Delta y = 2 \sin \frac{1}{2} \Delta x \cos (x + \frac{1}{2} \Delta x),$$

und folglich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\Delta x} \cos (x + \frac{1}{2} \Delta x)$$

oder

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\frac{1}{2} \Delta x} \cos (x + \frac{1}{2} \Delta x).$$

Lässt man nun Δx sich der Null nähern; so nähert $\cos (x + \frac{1}{2} \Delta x)$ sich offenbar immer mehr und mehr der Gränze $\cos x$ und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur Δx nahe genug bei Null annimmt, oder es ist

$$\lim \cos (x + \frac{1}{2} \Delta x) = \cos x,$$

immer unter der Voraussetzung, dass Δx sich der Null nähert.

Um ferner die Gränze zu finden, welcher sich der Bruch

$$\frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\frac{1}{2} \Delta x},$$

wofern es nämlich überhaupt eine solche Gränze giebt, immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade nähert, wenn Δx sich der Null nähert, nehme man, welches offenbar immer möglich ist, den absoluten Werth von Δx so klein, dass

$$\sin \frac{1}{2} \Delta x, \quad \frac{1}{2} \Delta x, \quad \tan \frac{1}{2} \Delta x$$

gleiche Vorzeichen haben, und dass für den in Rede stehenden Werth von Δx und für alle ihren absoluten Werthen nach klei-

nere Δx , in Bezug auf die absoluten Werthe der folgenden Grössen,

$$\sin \frac{1}{2} \Delta x < \frac{1}{2} \Delta x < \tan \frac{1}{2} \Delta x$$

ist. Dann ist

$$\frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\sin \frac{1}{2} \Delta x} > \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\frac{1}{2} \Delta x} > \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\tan \frac{1}{2} \Delta x},$$

d. i.

$$1 > \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\frac{1}{2} \Delta x} > \cos \frac{1}{2} \Delta x.$$

Man sieht also, dass für die in Rede stehenden Werthe von Δx der Bruch

$$\frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\frac{1}{2} \Delta x}$$

immer zwischen 1 und $\cos \frac{1}{2} \Delta x$ enthalten ist. Da nun, wenn Δx sich der Null nähert, $\cos \frac{1}{2} \Delta x$ sich immer mehr und mehr der Einheit nähert, und derselben beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur Δx der Null nahe genug kommen lässt; so nähert sich, wenn Δx sich der Null nähert, offenbar auch der obige Bruch immer mehr und mehr der Einheit, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur Δx der Null nahe genug kommen lässt. Also ist

$$\lim \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\frac{1}{2} \Delta x} = 1,$$

immer unter der Voraussetzung, dass Δx sich der Null nähert.

Weil nun unter derselben Voraussetzung, da nach dem Obigen

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\frac{1}{2} \Delta x} \cos (x + \frac{1}{2} \Delta x)$$

ist, offenbar

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\frac{1}{2} \Delta x} \cdot \lim \cos (x + \frac{1}{2} \Delta x)$$

ist; so ist nach dem Vorhergehenden

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x,$$

immer unter der Voraussetzung, dass Δx sich der Null nähert.

Nach dem allgemeinen Begriffe des Differentialquotienten ist aber

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Also ist

$$1. \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \cos x,$$

und folglich

$$2. \quad \partial y = \cos x \partial x.$$

§. 61.

Das Differential der Function $y = \cos x$ kann man auf ganz ähnliche Art finden.

Nach §. 10. 5. ist nämlich

$$\Delta y = -2 \sin \frac{1}{2} \Delta x \sin (x + \frac{1}{2} \Delta x)$$

und folglich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -2 \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\Delta x} \sin (x + \frac{1}{2} \Delta x)$$

oder

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = - \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\frac{1}{2} \Delta x} \sin (x + \frac{1}{2} \Delta x);$$

also offenbar

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = - \lim \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\frac{1}{2} \Delta x} \cdot \lim \sin (x + \frac{1}{2} \Delta x),$$

immer unter der Voraussetzung, dass Δx sich der Null nähert.

Weil nun aber, wie sogleich erhellet,

$$\lim \sin (x + \frac{1}{2} \Delta x) = \sin x,$$

und nach §. 60.

$$\lim \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\frac{1}{2} \Delta x} = 1$$

ist; so ist

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = - \sin x,$$

d. i.

$$1. \quad \frac{\partial y}{\partial x} = - \sin x,$$

und folglich

$$2. \quad \partial y = - \sin x \partial x.$$

Man kann aber dieses Differential auch noch auf folgende Art finden. Bekanntlich ist

$$y^2 = 1 - \sin x^2,$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten dieser Gleichung differentiirt,

$$2y \frac{\partial y}{\partial x} = -2 \sin x \frac{\partial \sin x}{\partial x}$$

oder

$$y \frac{\partial y}{\partial x} = - \sin x \frac{\partial \sin x}{\partial x}.$$

Weil nun nach §. 60.

$$\frac{\partial \sin x}{\partial x} = \cos x$$

ist; so ist

$$y \frac{\partial y}{\partial x} = - \sin x \cos x,$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten mit $y = \cos x$ dividirt,

$$1^*. \quad \frac{\partial y}{\partial x} = - \sin x;$$

also

$$2^*. \partial y = - \sin x \partial x.$$

Endlich kann man dieses Differential auch noch auf folgende sehr einfache Art finden. Bekanntlich ist

$$y = \sin \left(\frac{1}{2} \pi - x \right),$$

oder, wenn wir

$$\frac{1}{2} \pi - x = z$$

setzen,

$$y = \sin z.$$

Weil nun nach §. 43.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x},$$

und nach §. 60.

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \cos z,$$

auch offenbar

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -1$$

ist; so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = - \cos z,$$

d. i., weil $\cos z = \sin x$ ist,

$$1^{**}. \frac{\partial y}{\partial x} = - \sin x,$$

und folglich

$$2^{**}. \partial y = - \sin x \partial x.$$

§. 62.

Für $y = \tan x$ ist bekanntlich

$$y = \frac{\sin x}{\cos x}$$

und folglich

$$\Delta y = \frac{\sin (x + \Delta x)}{\cos (x + \Delta x)} - \frac{\sin x}{\cos x},$$

woraus leicht

$$\Delta y = \frac{\sin \Delta x}{\cos x \cos (x + \Delta x)},$$

oder

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\cos x \cos (x + \Delta x)}$$

erhalten wird.

Folglich ist, immer unter der Voraussetzung, dass Δx sich der Null nähert, offenbar

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\cos x} \lim \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cdot \lim \frac{1}{\cos (x + \Delta x)}.$$

Aus §. 60. geht aber hervor, dass

$$\lim \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1$$

ist. Folglich ist, weil offenbar

$$\lim \frac{1}{\cos (x + \Delta x)} = \frac{1}{\cos x}$$

ist,

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\cos x^2}.$$

Nach dem allgemeinen Begriffe des Differentialquotienten ist aber

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Also ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\cos x^2}, \quad \partial y = \frac{\partial x}{\cos x^2}.$$

Dieselben Ausdrücke ergeben sich auch auf folgende Art. Weil

$$y = \frac{\sin x}{\cos x},$$

oder, wenn wir

$$\sin x = p, \quad \cos x = q$$

setzen,

$$y = \frac{p}{q}$$

ist; so ist nach §. 42.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{q \frac{\partial p}{\partial x} - p \frac{\partial q}{\partial x}}{q^2}.$$

Nach §. 60. und §. 61. ist

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \cos x, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = -\sin x.$$

Also ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\cos x^2 + \sin x^2}{\cos x^2},$$

und folglich nach einem bekannten goniometrischen Satze

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\cos x^2}, \quad \partial y = \frac{\partial x}{\cos x^2},$$

ganz übereinstimmend mit dem Vorhergehenden.

§. 63.

Für $y = \cot x$ ist

$$y = \frac{\cos x}{\sin x}$$

und folglich

$$\Delta y = \frac{\cos (x + \Delta x)}{\sin (x + \Delta x)} - \frac{\cos x}{\sin x},$$

woraus sich leicht

$$\Delta y = - \frac{\sin \Delta x}{\sin x \sin (x + \Delta x)}.$$

also

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = - \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\sin x \sin (x + \Delta x)}$$

ergiebt.

Folglich ist

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = - \frac{1}{\sin x} \lim \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cdot \lim \frac{1}{\sin (x + \Delta x)},$$

und hieraus auf ganz ähnliche Art wie in §. 62.

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = - \frac{1}{\sin x^2},$$

d. i.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = - \frac{1}{\sin x^2}, \quad \partial y = - \frac{\partial x}{\sin x^2}.$$

Dieselben Ausdrücke ergeben sich auch auf folgende Art. Man setze

$$\cos x = p, \quad \sin x = q, \quad y = \frac{p}{q};$$

so ist nach §. 42.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{q \frac{\partial p}{\partial x} - p \frac{\partial q}{\partial x}}{q^2}.$$

Weil nun nach §. 61. und §. 60.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = - \sin x, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = \cos x$$

ist; so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = - \frac{\sin x^2 + \cos x^2}{\sin x^2},$$

d. i.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = - \frac{1}{\sin x^2}, \quad \partial y = - \frac{\partial x}{\sin x^2},$$

ganz wie vorher.

Endlich kann man diese Ausdrücke auch noch auf folgendem Wege erhalten. Weil

$$\cot x = \tan \left(\frac{1}{2} \pi - x \right)$$

ist; so ist, wenn wir $\frac{1}{2} \pi - x = z$ setzen,

$$y = \tan z.$$

Nach §. 43. ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x},$$

und nach §. 62. ist

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{\cos z^2};$$

auch ist offenbar

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - 1.$$

Also ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = - \frac{1}{\cos z^2},$$

d. i., weil $\cos z = \sin x$ ist,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = - \frac{1}{\sin x^2}, \quad \partial y = - \frac{\partial x}{\sin x^2},$$

ganz wie vorher.

§. 64.

Für $y = \sec x$ ist

$$\begin{aligned} \Delta y &= \frac{1}{\cos (x + \Delta x)} - \frac{1}{\cos x} \\ &= \frac{\cos x - \cos (x + \Delta x)}{\cos x \cos (x + \Delta x)} \\ &= \frac{2 \sin \frac{1}{2} \Delta x \sin (x + \frac{1}{2} \Delta x)}{\cos x \cos (x + \Delta x)}, \end{aligned}$$

und folglich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\frac{1}{2} \Delta x} \cdot \frac{\sin (x + \frac{1}{2} \Delta x)}{\cos x \cos (x + \Delta x)};$$

also

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\cos x} \lim \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\frac{1}{2} \Delta x} \cdot \lim \frac{\sin (x + \frac{1}{2} \Delta x)}{\cos (x + \Delta x)}.$$

Weil nun nach §. 60.

$$\lim \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\frac{1}{2} \Delta x} = 1$$

und offenbar

$$\lim \frac{\sin (x + \frac{1}{2} \Delta x)}{\cos (x + \Delta x)} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

ist; so ist

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\tan x}{\cos x},$$

d. i.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\tan x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x^2}, \quad \partial y = \frac{\tan x}{\cos x} \partial x = \frac{\sin x}{\cos x^2} \partial x.$$

Dieselben Ausdrücke ergeben sich auf folgende Art. Setzen wir $\cos x = p$, so ist

$$y = p^{-1},$$

und folglich nach §. 45.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = - p^{-2} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Nach §. 61. ist

$$\frac{\partial p}{\partial x} = - \sin x.$$

Also ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\sin x}{\cos x^2} = \frac{\tan x}{\cos x}, \quad \partial y = \frac{\sin x}{\cos x^2} \partial x = \frac{\tan x}{\cos x} \partial x,$$

wie vorher.

§. 65.

Für $y = \operatorname{cosec} x$ ist

$$\begin{aligned} \Delta y &= \frac{1}{\sin(x + \Delta x)} - \frac{1}{\sin x} \\ &= \frac{\sin x - \sin(x + \Delta x)}{\sin x \sin(x + \Delta x)} \\ &= - \frac{2 \sin \frac{1}{2} \Delta x \cos(x + \frac{1}{2} \Delta x)}{\sin x \sin(x + \Delta x)}; \end{aligned}$$

also

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = - \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\frac{1}{2} \Delta x} \cdot \frac{\cos(x + \frac{1}{2} \Delta x)}{\sin x \sin(x + \Delta x)},$$

und folglich

$$\operatorname{Lim} \frac{\Delta y}{\Delta x} = - \frac{1}{\sin x} \operatorname{Lim} \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\frac{1}{2} \Delta x} \cdot \operatorname{Lim} \frac{\cos(x + \frac{1}{2} \Delta x)}{\sin(x + \Delta x)}.$$

Weil nun nach §. 60.

$$\operatorname{Lim} \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\frac{1}{2} \Delta x} = 1$$

und offenbar

$$\operatorname{Lim} \frac{\cos(x + \frac{1}{2} \Delta x)}{\sin(x + \Delta x)} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

ist; so ist

$$\operatorname{Lim} \frac{\Delta y}{\Delta x} = - \frac{\cot x}{\sin x},$$

d. i.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = - \frac{\cot x}{\sin x} = - \frac{\cos x}{\sin x^2}, \quad \partial y = - \frac{\cot x}{\sin x} \partial x = - \frac{\cos x}{\sin x^2} \partial x.$$

Zu denselben Ausdrücken gelangt man auch auf folgendem Wege. Für $\sin x = p$ ist

$$y = p^{-1},$$

und folglich nach §. 45.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = - p^{-2} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Nach §. 60. ist aber

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \cos x.$$

Also ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = - \frac{\cos x}{\sin x^2} = - \frac{\cot x}{\sin x}, \quad \partial y = - \frac{\cos x}{\sin x^2} \partial x = - \frac{\cot x}{\sin x} \partial x.$$

Endlich kann man zu diesen Formeln auch auf folgende Art gelangen. Für $\frac{1}{2}\pi - x = z$ ist

$$y = \sec z.$$

Nach §. 43. ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x};$$

und nach §. 64. ist

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\tan z}{\cos z};$$

auch ist offenbar

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

Also ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\tan z}{\cos z},$$

d. i.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\cot x}{\sin x} = -\frac{\cos x}{\sin x^2}, \quad \partial y = -\frac{\cot x}{\sin x} \partial x = -\frac{\cos x}{\sin x^2} \partial x,$$

ganz wie vorher.

§. 66.

Für $y = \sin x$ ist

$$\begin{aligned} \Delta y &= \sin(x + \Delta x) - \sin x \\ &= \cos x - \cos(x + \Delta x) \\ &= 2\sin \frac{1}{2} \Delta x \sin(x + \frac{1}{2} \Delta x); \end{aligned}$$

also

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\frac{1}{2} \Delta x} \sin(x + \frac{1}{2} \Delta x),$$

und folglich

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\frac{1}{2} \Delta x} \cdot \lim \sin(x + \frac{1}{2} \Delta x).$$

Aber nach §. 60.

$$\lim \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\frac{1}{2} \Delta x} = 1$$

und offenbar

$$\lim \sin(x + \frac{1}{2} \Delta x) = \sin x.$$

Also

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \sin x,$$

d. i.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \sin x, \quad \partial y = \sin x \partial x.$$

Noch leichter ergeben sich diese Ausdrücke auf folgende Art. Bekanntlich ist

$$y = 1 - \cos x,$$

und folglich

$$\frac{\partial y}{\partial x} = - \frac{\partial \cos x}{\partial x},$$

d. i. nach §. 61.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \sin x, \quad \partial y = \sin x \partial x,$$

wie vorher.

§. 67.

Für $y = \cos v x$ ist

$$\begin{aligned} \Delta y &= \cos v (x + \Delta x) - \cos v x \\ &= \sin x - \sin (x + \Delta x) \\ &= - 2 \sin \frac{1}{2} \Delta x \cos (x + \frac{1}{2} \Delta x); \end{aligned}$$

folglich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = - \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\frac{1}{2} \Delta x} \cos (x + \frac{1}{2} \Delta x);$$

also

$$\text{Lim } \frac{\Delta y}{\Delta x} = - \text{Lim } \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\frac{1}{2} \Delta x} \cdot \text{Lim } \cos (x + \frac{1}{2} \Delta x).$$

Weil nun nach §. 60.

$$\text{Lim } \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\frac{1}{2} \Delta x} = 1$$

und offenbar

$$\text{Lim } \cos (x + \frac{1}{2} \Delta x) = \cos x$$

ist; so ist

$$\text{Lim } \frac{\Delta y}{\Delta x} = - \cos x,$$

und folglich

$$\frac{\partial y}{\partial x} = - \cos x, \quad \partial y = - \cos x \partial x.$$

Dieselben Formeln ergeben sich auch leicht auf folgende Art. Weil

$$y = 1 - \sin x$$

ist; so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = - \frac{\partial \sin x}{\partial x}$$

und folglich nach §. 60.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = - \cos x, \quad \partial y = - \cos x \partial x.$$

Endlich ist, wenn man $\frac{1}{2} \pi - x = z$ setzt, auch

$$y = \sin v z.$$

Nach §. 43. ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x},$$

und nach §. 66. ist

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \sin z;$$

auch ist offenbar

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

Also ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\sin z,$$

d. i.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\cos x, \quad \partial y = -\cos x \partial x,$$

wie vorher.

§. 68.

Wenn nun ferner $y = \text{Arc sin } x$ die gegebene Function ist; so ist

$$x = \sin y.$$

Nach §. 43. ist

$$\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Aber

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = \cos y \quad (\S. 60.).$$

Also

$$1 = \cos y \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\cos y}.$$

Weil nun

$$\cos y^2 = 1 - \sin y^2 = 1 - x^2$$

ist; so ist

$$1. \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

und folglich

$$2. \quad \partial y = \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Zu bemerken hat man aber hierbei, dass man in diesen beiden Formeln die Quadratwurzel im Nenner positiv oder negativ zu nehmen hat, jenachdem $\cos y$, d. i. der Cosinus des gegebenen Bogens, positiv oder negativ ist, wie augenblicklich erhellet, wenn man nur bemerkt, dass vorher

$$\cos y = \sqrt{1-x^2}$$

gesetzt worden ist. Ist $\text{Arc sin } x$ der zu dem Sinus x gehörende Bogen, welcher den kleinsten absoluten Werth hat; so ist

$\cos y$ positiv, und in diesem Falle also die Quadratwurzel in den obigen Formeln positiv zu nehmen. Dass x zwischen -1 und $+1$ liegen muss, wenn die in Rede stehenden Formeln reell seyn und keine unendlichen Werthe liefern sollen, bedarf wohl kaum noch einer besondern Erwähnung.

§. 69.

Für $y = \text{Arc cos } x$ ist

$$x = \cos y.$$

Nach §. 43. ist

$$\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Aber

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = -\sin y \quad (\S. 61.).$$

Also

$$1 = -\sin y \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{\sin y}.$$

Weil nun

$$\sin^2 y = 1 - \cos^2 y = 1 - x^2$$

ist; so ist

$$1. \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

und folglich

$$2. \quad \partial y = -\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Die Quadratwurzel ist in diesen Formeln positiv oder negativ zu nehmen, jenachdem $\sin y$ positiv oder negativ ist. Wenn $\text{Arc cos } x$ der kleinste dem Cosinus x entsprechende positive Bogen ist; so ist $\sin y$ positiv, und folglich in den obigen Formeln die Quadratwurzel positiv zu nehmen. Auch hier muss x zwischen -1 und $+1$ liegen.

§. 70.

Für $y = \text{Arc tang } x$ ist

$$x = \text{tang } y.$$

Nach §. 43. ist

$$\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Aber

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{\cos^2 y} \quad (\S. 62.).$$

Also

$$1 = \frac{1}{\cos^2 y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \cos^2 y.$$

Weil nun

$$x^2 = \tan^2 y^2 = \frac{\sin^2 y^2}{\cos^2 y^2} = \frac{1 - \cos^2 y^2}{\cos^2 y^2}$$

und folglich

$$\cos^2 y^2 = \frac{1}{1 + x^2}$$

ist; so ist

$$1. \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{1 + x^2},$$

und

$$2. \quad \partial y = \frac{\partial x}{1 + x^2}.$$

§. 71.

Für $y = \text{Arc cot } x$ ist

$$x = \cot y.$$

Nach §. 43. ist

$$\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Aber

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = - \frac{1}{\sin^2 y^2} \quad (\S. 63.).$$

Also

$$1 = - \frac{1}{\sin^2 y^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = - \sin^2 y^2.$$

Weil nun

$$x^2 = \cot^2 y^2 = \frac{\cos^2 y^2}{\sin^2 y^2} = \frac{1 - \sin^2 y^2}{\sin^2 y^2}$$

und folglich

$$\sin^2 y^2 = \frac{1}{1 + x^2}$$

ist; so ist

$$1. \quad \frac{\partial y}{\partial x} = - \frac{1}{1 + x^2},$$

und

$$2. \quad \partial y = - \frac{\partial x}{1 + x^2}.$$

§. 72.

Für $y = \text{Arc sec } x$ ist

$$x = \sec y.$$

Nach §. 43. ist

$$\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Aber

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\tan y}{\cos y} \quad (\S. 64.).$$

Also

$$1 = \frac{\operatorname{tang} y}{\cos y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\cos y}{\operatorname{tang} y}.$$

Weil nun

$$\cos y = \frac{1}{\sec y} = \frac{1}{x}$$

und

$$\operatorname{tang} y = \sqrt{\sec^2 y - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$$

ist; so ist

$$1. \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

und

$$2. \quad \partial y = \frac{\partial x}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Die Quadratwurzel ist in diesen Formeln positiv oder negativ zu nehmen, jenachdem $\operatorname{tang} y$ positiv oder negativ ist. Bezeichnet $\operatorname{Arc} \sec x$ den kleinsten zu der Secante x gehörenden positiven Bogen; so ist die Quadratwurzel positiv oder negativ zu nehmen, jenachdem x positiv oder negativ ist, d. h. die Quadratwurzel ist in diesem Falle immer mit einem solchen Vorzeichen zu nehmen, dass in den obigen Formeln der Nenner $x\sqrt{x^2 - 1}$ positiv ist. Dass der absolute Werth von x grösser als die Einheit seyn muss, wenn die Formeln reell seyn und nicht unendlich werden sollen, versteht sich von selbst.

§. 73.

Für $y = \operatorname{Arc} \operatorname{cosec} x$ ist

$$x = \operatorname{cosec} y.$$

Nach §. 43. ist

$$\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Aber

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{\cot y}{\sin y} \quad (\S. 65.).$$

Also

$$1 = -\frac{\cot y}{\sin y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\sin y}{\cot y}.$$

Weil nun

$$\sin y = \frac{1}{\operatorname{cosec} y} = \frac{1}{x}$$

und

$$\cot y = \sqrt{\operatorname{cosec}^2 y - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$$

ist; so ist

$$1. \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

und

$$2. \quad \partial y = -\frac{\partial x}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Die Quadratwurzel ist in diesen Formeln positiv oder negativ zu nehmen, jenachdem $\cot y$ positiv oder negativ ist. Wenn $\text{Arc cosec } x$ der zu der Cosecante x gehörende Bogen ist, welcher den kleinsten absoluten Werth hat; so ist die Quadratwurzel positiv oder negativ zu nehmen, jenachdem x positiv oder negativ ist, d. h. die Quadratwurzel ist in diesem Falle immer mit einem solchen Vorzeichen zu nehmen, dass in den obigen Formeln der Nenner $x\sqrt{x^2-1}$ positiv ist. Auch hier muss der absolute Werth von x grösser als die Einheit seyn.

§. 74.

Für $y = \text{Arc sin } x$ ist

$$x = \sin y.$$

Nach §. 43. ist

$$\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Aber

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = \sin y \quad (\S. 66.).$$

Also

$$1 = \sin y \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\sin y}.$$

Weil nun

$$\cos y = 1 - \sin^2 y = 1 - x^2$$

und folglich

$$\sin y = \sqrt{1 - (1 - x^2)} = \sqrt{2x - x^2} = \sqrt{x(2-x)}$$

ist; so ist

$$1. \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}$$

und

$$2. \quad \frac{\partial x}{\partial y} = \sqrt{x(2-x)}.$$

Die Quadratwurzel im Nenner ist positiv oder negativ zu nehmen, jenachdem $\sin y$ positiv oder negativ ist. Bezeichnet $\text{Arc sin } x$ den kleinsten zu dem Sinus versus x gehörenden positiven Bogen; so ist die Quadratwurzel positiv zu nehmen. x muss hier stets positiv und kleiner als Zwei seyn.

§. 75.

Für $y = \text{Arc cos } x$ ist

$$x = \cos y.$$

Nach §. 43. ist

$$\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Aber

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = -\cos y \text{ (§. 67.)}$$

Also

$$1 = -\cos y \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{\cos y}.$$

Weil nun

$$\sin y = 1 - \cos y = 1 - x$$

und folglich

$$\cos y = \sqrt{1 - (1-x)^2} = \sqrt{2x - x^2} = \sqrt{x(2-x)}$$

ist; so ist

$$1. \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}$$

und

$$2. \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\partial x}{\sqrt{x(2-x)}}$$

Die Quadratwurzel im Nenner ist positiv oder negativ zu nehmen, jenachdem $\cos y$ positiv oder negativ ist. Bezeichnet $\text{Arc cos } x$ den zu dem Cosinus versus x gehörenden Bogen, welcher den kleinsten absoluten Werth hat; so ist die Quadratwurzel positiv zu nehmen. Auch hier muss x stets positiv und kleiner als Zwei seyn.

G. Differentiation der zusammengesetzten transcendenten Functionen.

§. 76.

Die Differentiation der zusammengesetzten transcendenten Functionen hat jetzt nicht die geringste Schwierigkeit mehr, und einige Beispiele werden zur Erläuterung des Verfahrens, welches man in jedem Falle zu befolgen hat, völlig hinreichend seyn.

1. Wenn $y = a^{b^x}$, wo a und b positive Grössen seyn sollen, die gegebene Function ist; so setze man $b^x = z$ und folglich $y = a^z$.

Nach §. 43. ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Weil nun nach §. 57.

$$\frac{\partial y}{\partial z} = a^z \log a, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = b^x \log b$$

ist; so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = a^z b^x \log a \log b = a^{b^x} b^x \log a \log b,$$

und folglich

$$\partial y = a^{b^x} b^x \log a \log b \partial x.$$

2. Für $y = e^{e^x}$ ist im Vorhergehenden $a=b=e$, $la=lb=le=1$ zu setzen. Folglich ist in diesem Falle

$$\partial y = e^{e^x} e^x \partial x.$$

3. Ist $y = e^{x^2}$ die gegebene Function; so setze man $x^2 = z$, also $y = e^z$.

Nach §. 43. ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Weil nun nach §. 57. und §. 44.

$$\frac{\partial y}{\partial z} = e^z, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 2x$$

ist; so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2x e^z = 2x e^{x^2}, \quad \partial y = 2x e^{x^2} \partial x.$$

4. Wenn $y = \frac{e^{ax}}{x} = x^{-1} e^{ax}$ die gegebene Function ist; so ist nach §. 40.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = x^{-1} \frac{\partial \cdot e^{ax}}{\partial x} + e^{ax} \frac{\partial \cdot x^{-1}}{\partial x}.$$

Für $ax = z$ ist nach §. 43., §. 57. und §. 37.

$$\frac{\partial \cdot e^{ax}}{\partial x} = \frac{\partial \cdot e^z}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = a e^z = a e^{ax}.$$

Nach §. 44. ist

$$\frac{\partial \cdot x^{-1}}{\partial x} = -x^{-2}.$$

Also ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a e^{ax}}{x} - \frac{e^{ax}}{x^2} = \frac{e^{ax}}{x} \left(a - \frac{1}{x} \right),$$

und folglich

$$\partial y = \frac{e^{ax}}{x} \left(a - \frac{1}{x} \right) \partial x.$$

5. Wenn $y = e^{\sin x}$ die gegebene Function ist; so setze man $\sin x = z$, folglich $y = e^z$. Nach §. 43. ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Weil nun nach §. 57. und §. 60.

$$\frac{\partial y}{\partial z} = e^z, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \cos x$$

ist; so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = e^z \cos x = e^{\sin x} \cos x,$$

und folglich

$$\partial y = e^{\sin x} \cos x \partial x.$$

§. 77.

Ist $y = l\sqrt{a^2+x^2}$ die gegebene Function; so setze man

$$\sqrt{a^2+x^2} = z$$

und folglich $y = lz$. Nach §. 43. ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Weil nun nach §. 59.

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{z}$$

und nach §. 45.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2} (a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

ist; so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{x}{z\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{x}{a^2+x^2},$$

und folglich

$$\partial y = \frac{x \partial x}{a^2 + x^2}.$$

Ist ferner

$$y = x\sqrt{a^2+x^2} + l(x + \sqrt{a^2+x^2})$$

die gegebene Function; so ist nach §. 38.

$$\partial y = \partial . x \sqrt{a^2+x^2} + \partial l(x + \sqrt{a^2+x^2}).$$

Ferner ist nach §. 40.

$$\partial . x \sqrt{a^2+x^2} = x \partial \sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{a^2+x^2} \cdot \partial x,$$

und folglich nach §. 43. und §. 44.

$$\begin{aligned} \partial . x \sqrt{a^2+x^2} &= \frac{1}{2} x (a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \partial x + \sqrt{a^2+x^2} \cdot \partial x \\ &= \frac{a^2+2x^2}{\sqrt{a^2+x^2}} \partial x. \end{aligned}$$

Setzen wir aber

$$x + \sqrt{a^2+x^2} = z;$$

so ist nach §. 43. und §. 59.

$$\partial l(x + \sqrt{a^2+x^2}) = \frac{\partial lz}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \partial x = \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \partial x.$$

Aber nach §. 38., §. 43. und §. 44.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 + \frac{1}{2} (a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x + \sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{z}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Also

$$\partial l(x + \sqrt{a^2+x^2}) = \frac{\partial x}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Folglich ist

$$\partial y = \frac{1+a^2+2x^2}{\sqrt{a^2+x^2}} \partial x.$$

Wäre $a = 1$, d. i.

so wäre $y = x \sqrt{1+x^2} + l(x + \sqrt{1+x^2})$;

$$\partial y = 2\sqrt{1+x^2} \cdot \partial x.$$

§. 78.

Ist

$$y = \sqrt[3]{3e^x - \frac{x^2}{\sin x}}$$

die gegebene Function; so setze man

$$3e^x - \frac{x^2}{\sin x} = z$$

und folglich

$$y = \sqrt[3]{z}.$$

Nach §. 43. ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x},$$

und nach §. 44. ist

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{3} z^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{z^2}}.$$

Also ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{3\sqrt[3]{\left(3e^x - \frac{x^2}{\sin x}\right)^2}} \cdot \frac{\partial z}{\partial x},$$

und es kommt folglich jetzt bloss noch auf die Entwicklung des Differentialquotienten $\frac{\partial z}{\partial x}$ an.

Nach §. 37., §. 38., §. 42., §. 44., §. 57. und §. 60. erhält man aber leicht

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 3e^x - \frac{2x \sin x - x^2 \cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{(3e^x \sin x - 2x) \sin x + x^2 \cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{3e^x \sin x - 2x + x^2 \cot x}{\sin x}. \end{aligned}$$

Also ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{3e^x \sin x - 2x + x^2 \cot x}{3\sqrt[3]{\left(3e^x - \frac{x^2}{\sin x}\right)^2}},$$

und folglich

$$\partial y = \frac{3e^x \sin x - 2x + x^2 \cot x}{3\sqrt[3]{\left(3e^x - \frac{x^2}{\sin x}\right)^2}} \partial x.$$

Ist ferner

$$y = \text{Arc sin } \frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}$$

die gegebene Function; so setze man

$$\frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2} = z, \quad y = \text{Arc sin } z.$$

Nach §. 43. ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x},$$

und nach §. 68. ist

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}},$$

die Quadratwurzel positiv oder negativ genommen, jenachdem $\cos y$ positiv oder negativ ist.

Ferner ist, wie man leicht findet,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{4a^2 x}{(a^2 + x^2)^2}.$$

Also ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = - \frac{4a^2 x}{(a^2 + x^2)^2 \sqrt{1 - z^2}},$$

die Quadratwurzel positiv oder negativ genommen, jenachdem $\cos y$ positiv oder negativ ist.

Weil nun aber

$$1 - z^2 = 1 - \left(\frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2} \right)^2 = \frac{4a^2 x^2}{(a^2 + x^2)^2}$$

ist; so ist, wie leicht erhellen wird,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = - \frac{2a^2 x}{(a^2 + x^2) \sqrt{a^2 x^2}},$$

die Quadratwurzel positiv oder negativ genommen, jenachdem $\cos y$ positiv oder negativ ist.

Ist nun zuerst ax positiv; so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \mp \frac{2a}{a^2 + x^2}, \quad \partial y = \mp \frac{2a \partial x}{a^2 + x^2},$$

und das obere oder untere Zeichen zu nehmen, jenachdem $\cos y$ positiv oder negativ ist.

Ist aber ax negativ; so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \pm \frac{2a}{a^2 + x^2}, \quad \partial y = \pm \frac{2a \partial x}{a^2 + x^2},$$

und wieder das obere oder das untere Zeichen zu nehmen, jenachdem $\cos y$ positiv oder negativ ist.

Ist also $\cos y$ positiv; so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \mp \frac{2a}{a^2 + x^2}, \quad \partial y = \mp \frac{2a \partial x}{a^2 + x^2}$$

und das obere oder untere Zeichen zu nehmen, jenachdem ax positiv oder negativ ist.

Ist aber $\cos y$ negativ; so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \pm \frac{2a}{a^2 + x^2}, \quad \partial y = \pm \frac{2a \partial x}{a^2 + x^2},$$

und das obere oder untere Zeichen zu nehmen, jenachdem ax positiv oder negativ ist.

H. Differentiale der imaginären Functionen.

§. 79.

Unter dem Differentialquotienten einer imaginären Function von der Form

$$y = u + v \sqrt{-1},$$

wo u und v reelle Functionen von x bezeichnen sollen, versteht man die Grösse

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \sqrt{-1}.$$

Eben so versteht man unter dem Differential der imaginären Function

$$y = u + v \sqrt{-1}$$

die Grösse

$$\partial y = \partial u + \partial v \cdot \sqrt{-1}.$$

Weil bekanntlich

$$\partial u = \frac{\partial u}{\partial x} \partial x, \quad \partial v = \frac{\partial v}{\partial x} \partial x$$

und folglich

$$\partial y = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \sqrt{-1} \right) \partial x$$

ist; so ist auch hier immer

$$\partial y = \frac{\partial y}{\partial x} \partial x.$$

Ist überhaupt von dem Differentialquotienten oder dem Differential einer beliebigen imaginären Function von x die Rede; so muss dieselbe, bevor man zur wirklichen Entwicklung des Differentialquotienten oder des Differentials schreiten kann, eigentlich immer zuerst auf die Form $u + v\sqrt{-1}$, wo u und v reelle Functionen von x bezeichnen, gebracht werden, wenn dies nämlich überhaupt möglich ist. Nachdem dies geschehen, unterliegt die wirkliche Entwicklung des Differentialquotienten oder Differentials nach den obigen allgemeinen Vorschriften nicht der geringsten Schwierigkeit weiter.

Durch die folgenden, den in B. aufgelösten entsprechenden allgemeinen Aufgaben lässt sich die Entwicklung der Differen-

tiale der imaginären Functionen oft sehr abkürzen und vereinfachen.

§. 80.

Aufgabe. Wenn

$$y = (\alpha + \beta \sqrt{-1})(u + v \sqrt{-1})$$

ist, wo α und β reelle constante Grössen, u und v reelle Functionen von x bezeichnen, das Differential von y zu finden.

Auflösung. Es ist, wie man nach leichter Rechnung findet,

$$y = \alpha u - \beta v + (\beta u + \alpha v) \sqrt{-1},$$

und folglich nach §. 79.

$$\partial y = \partial(\alpha u - \beta v) + \partial(\beta u + \alpha v) \sqrt{-1}.$$

Aber

$$\partial(\alpha u - \beta v) = \alpha \partial u - \beta \partial v, \quad \partial(\beta u + \alpha v) = \beta \partial u + \alpha \partial v.$$

Also

$$\partial y = \alpha \partial u - \beta \partial v + (\beta \partial u + \alpha \partial v) \sqrt{-1}.$$

Nun ist aber nach §. 79.

$$\partial(u + v \sqrt{-1}) = \partial u + \partial v \sqrt{-1},$$

und folglich, wie man nach leichter Rechnung findet,

$$(\alpha + \beta \sqrt{-1}) \partial(u + v \sqrt{-1}) = \alpha \partial u - \beta \partial v + (\beta \partial u + \alpha \partial v) \sqrt{-1}.$$

Folglich ist

$$\partial y = (\alpha + \beta \sqrt{-1}) \partial(u + v \sqrt{-1}),$$

eine rücksichtlich ihrer Form mit der Gleichung 2. in §. 37. offenbar ganz übereinstimmende Gleichung.

§. 81.

Aufgabe. Wenn, indem α, β reelle constante Grössen und $u, u_1, \dots, u_k; v, v_1, \dots, v_k$ reelle Functionen von x bezeichnen,

$$y = \alpha + \beta \sqrt{-1} \pm (u + v \sqrt{-1}) \pm (u_1 + v_1 \sqrt{-1}) \pm \dots \pm (u_k + v_k \sqrt{-1})$$

ist, das Differential von y zu finden.

Auflösung. Weil

$$y = \alpha \pm u \pm u_1 \pm \dots \pm u_k + (\beta \pm v \pm v_1 \pm \dots \pm v_k) \sqrt{-1}$$

ist; so ist nach §. 79.

$$\partial y = \partial(\alpha \pm u \pm u_1 \pm \dots \pm u_k) + \partial(\beta \pm v \pm v_1 \pm \dots \pm v_k) \sqrt{-1},$$

und folglich, weil

$$\partial(\alpha \pm u \pm u_1 \pm \dots \pm u_k) = \pm \partial u \pm \partial u_1 \pm \dots \pm \partial u_k,$$

$$\partial(\beta \pm v \pm v_1 \pm \dots \pm v_k) = \pm \partial v \pm \partial v_1 \pm \dots \pm \partial v_k$$

ist,

$$\partial y = \pm (\partial u + \partial u_1 + \dots + \partial u_k) \pm (\partial v + \partial v_1 + \dots + \partial v_k) \sqrt{R-1}$$

oder

$$\partial y = \pm (\partial u + \partial v \sqrt{R-1}) \pm (\partial u_1 + \partial v_1 \sqrt{R-1}) \pm \dots \pm (\partial u_k + \partial v_k \sqrt{R-1}).$$

Weil nun nach §. 79.

$$\partial(u + v \sqrt{R-1}) = \partial u + \partial v \sqrt{R-1},$$

$$\partial(u_1 + v_1 \sqrt{R-1}) = \partial u_1 + \partial v_1 \sqrt{R-1},$$

u. s. w.

$$\partial(u_k + v_k \sqrt{R-1}) = \partial u_k + \partial v_k \sqrt{R-1}$$

ist; so ist

$$\partial y = \pm \partial(u + v \sqrt{R-1}) \pm \partial(u_1 + v_1 \sqrt{R-1}) \pm \dots \pm \partial(u_k + v_k \sqrt{R-1}),$$

eine rücksichtlich ihrer Form mit der Gleichung 2. in §. 38. ganz übereinstimmende Gleichung.

§. 82.

Dass, wenn α und β reelle constante Grössen bezeichnen, jederzeit

$$\partial(\alpha + \beta \sqrt{R-1}) = 0$$

ist, liesse sich eben so aus §. 81. ableiten, wie §. 39. aus §. 38. abgeleitet worden ist. Noch leichter gelangt man aber zu diesem Resultat auf folgende Art.

Nach §. 79. ist

$$\partial(\alpha + \beta \sqrt{R-1}) = \partial \alpha + \partial \beta \sqrt{R-1}.$$

Nach §. 39. ist aber, weil α und β reelle constante Grössen sind, $\partial \alpha = 0$, $\partial \beta = 0$. Also ist auch

$$\partial(\alpha + \beta \sqrt{R-1}) = 0,$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 83.

Aufgabe. Wenn, indem $p, q; u, v$ reelle Functionen von x bezeichnen,

$$y = (p + q \sqrt{R-1})(u + v \sqrt{R-1})$$

ist, das Differential von y zu finden.

Auflösung. Mittelst leichter Rechnung findet man

$$y = pu - qv + (qu + pv)\sqrt{R-1}.$$

Also ist nach §. 79.

$$\partial y = \partial(pu - qv) + \partial(qu + pv) \sqrt{R-1}.$$

Aber

$$\partial(pu - qv) = p\partial u + u\partial p - q\partial v - v\partial q,$$

$$\partial(qu + pv) = q\partial u + u\partial q + p\partial v + v\partial p.$$

Folglich

$$\begin{aligned} \partial y &= p\partial u + u\partial p - q\partial v - v\partial q \\ &\quad + (q\partial u + u\partial q + p\partial v + v\partial p)Y^{-1}. \end{aligned}$$

Weil nun nach §. 79.

$$\partial(u + vY^{-1}) = \partial u + \partial v \cdot Y^{-1},$$

$$\partial(p + qY^{-1}) = \partial p + \partial q \cdot Y^{-1}$$

ist; so ist

$$\begin{aligned} &(p + qY^{-1}) \partial(u + vY^{-1}) + (u + vY^{-1}) \partial(p + qY^{-1}) \\ &= (p + qY^{-1}) (\partial u + \partial v \cdot Y^{-1}) + (u + vY^{-1}) (\partial p + \partial q \cdot Y^{-1}) \\ &= p\partial u - q\partial v + (q\partial u + p\partial v)Y^{-1} \\ &\quad + u\partial p - v\partial q + (v\partial p + u\partial q)Y^{-1} \\ &= p\partial u + u\partial p - q\partial v - v\partial q \\ &\quad + (q\partial u + u\partial q + p\partial v + v\partial p)Y^{-1}. \end{aligned}$$

Vergleicht man dies mit dem Obigen; so ergibt sich

$$\partial y = (p + qY^{-1}) \partial(u + vY^{-1}) + (u + vY^{-1}) \partial(p + qY^{-1})$$

oder

$$\frac{\partial y}{y} = \frac{\partial(p + qY^{-1})}{p + qY^{-1}} + \frac{\partial(u + vY^{-1})}{u + vY^{-1}},$$

zwei Gleichungen, die mit den Gleichungen 2. und 3. in §. 40. rücksichtlich ihrer Form ganz übereinstimmen.

§. 84.

Für

$$y = (p + qY^{-1}) (u + vY^{-1}) (r + sY^{-1}),$$

wo $p, q; u, v; r, s$ reelle Functionen von x sind, ist

$$\frac{\partial y}{y} = \frac{\partial(p + qY^{-1})}{p + qY^{-1}} + \frac{\partial(u + vY^{-1})}{u + vY^{-1}} + \frac{\partial(r + sY^{-1})}{r + sY^{-1}}.$$

Für

$$y = (p + qY^{-1}) (u + vY^{-1}) (r + sY^{-1}) (t + wY^{-1}),$$

wo $p, q; u, v; r, s; t, w$ reelle Functionen von x sind, ist

$$\frac{\partial y}{y} = \frac{\partial(p + qY^{-1})}{p + qY^{-1}} + \frac{\partial(u + vY^{-1})}{u + vY^{-1}} + \frac{\partial(r + sY^{-1})}{r + sY^{-1}} + \frac{\partial(t + wY^{-1})}{t + wY^{-1}}.$$

Das allgemeine Gesetz dieser Formeln fällt sogleich in die Augen.

Wegen des Beweises vergleiche man §. 41.

§. 85.

Aufgabe. Wenn, indem $p, q; u, v$ reelle Functionen von x bezeichnen,

$$y = \frac{p + q \sqrt{-1}}{u + v \sqrt{-1}}$$

ist, das Differential von y zu finden.

Auflösung. Man setze

$$y = \frac{p + q \sqrt{-1}}{u + v \sqrt{-1}} = P + Q \sqrt{-1},$$

und suche P, Q so zu bestimmen, dass dieser Gleichung genügt wird. Dieser Gleichung wird aber offenbar genügt, wenn man P, Q so bestimmen kann, dass

$$p + q \sqrt{-1} = (u + v \sqrt{-1}) (P + Q \sqrt{-1}),$$

d. i.

$$p + q \sqrt{-1} = Pu - Qv + (Pv + Qu) \sqrt{-1}$$

ist. Dieser Gleichung wird aber im Allgemeinen genügt, wenn man P, Q so bestimmt, dass

$$Pu - Qv = p \text{ und } Pv + Qu = q$$

ist. Da man nun aus diesen beiden Gleichungen sehr leicht

$$P = \frac{pu + qv}{u^2 + v^2}, \quad Q = \frac{qu - pv}{u^2 + v^2}$$

erhält; so ist

$$y = \frac{pu + qv}{u^2 + v^2} + \frac{qu - pv}{u^2 + v^2} \sqrt{-1}.$$

Nach §. 79. ist

$$\partial y = \partial P + \partial Q \sqrt{-1}$$

und durch Differentiation der Grössen P, Q findet man leicht

$$\begin{aligned} & (u^2 + v^2)^2 \cdot \partial P \\ &= (u^2 + v^2) (u \partial p + v \partial q) - \{p(u^2 - v^2) + 2quv\} \partial u \\ & \quad + \{q(u^2 - v^2) - 2puv\} \partial v, \\ & (u^2 + v^2)^2 \cdot \partial Q \\ &= (u^2 + v^2) (u \partial q - v \partial p) - \{q(u^2 - v^2) - 2puv\} \partial u \\ & \quad - \{p(u^2 - v^2) + 2quv\} \partial v. \end{aligned}$$

Setzt man ferner

$$\frac{(u + v \sqrt{-1}) \partial(p + q \sqrt{-1}) - (p + q \sqrt{-1}) \partial(u + v \sqrt{-1})}{(u + v \sqrt{-1})^2} = P' + Q' \sqrt{-1},$$

d. i. nach §. 79.

$$\frac{(u + v \sqrt{-1})(\partial p + \partial q \sqrt{-1}) - (p + q \sqrt{-1})(\partial u + \partial v \sqrt{-1})}{(u + v \sqrt{-1})^2} = P' + Q' \sqrt{-1},$$

oder

$$\begin{aligned} & P' + Q' \sqrt{-1} \\ &= \frac{u \partial p - v \partial q - p \partial u + q \partial v + (v \partial p + u \partial q - q \partial u - p \partial v) \sqrt{-1}}{u^2 - v^2 + 2uv \sqrt{-1}}; \end{aligned}$$

so findet man, wenn man nur bemerkt, dass

$$(u^2 - v^2)^2 + 4u^2v^2 = (u^2 + v^2)^2$$

ist, auf dieselbe Art, wie man vorher P , Q gefunden hat, leicht

$$(u^2 + v^2)^2. P' = (u^2 - v^2) (u\partial p - v\partial q - p\partial u + q\partial v) + 2uv (v\partial p + u\partial q - q\partial u - p\partial v),$$

$$(u^2 + v^2)^2. Q' = (u^2 - v^2) (v\partial p + u\partial q - q\partial u - p\partial v) - 2uv (u\partial p - v\partial q - p\partial u + q\partial v);$$

oder

$$(u^2 + v^2)^2. P' = (u^2 + v^2) (u\partial p + v\partial q) - \{p(u^2 - v^2) + 2quv\}\partial u + \{q(u^2 - v^2) - 2puv\}\partial v,$$

$$(u^2 + v^2)^2. Q' = (u^2 + v^2) (u\partial q - v\partial p) - \{q(u^2 - v^2) - 2puv\}\partial u - \{p(u^2 - v^2) + 2quv\}\partial v.$$

Hieraus, mit dem Obigen verglichen, ergibt sich

$$\partial P = P', \quad \partial Q = Q',$$

und folglich

$$\partial y = P' + Q' \sqrt{-1};$$

also

$$\partial y = \frac{(u + v\sqrt{-1}) \partial(p + q\sqrt{-1}) - (p + q\sqrt{-1}) \partial(u + v\sqrt{-1})}{(u + v\sqrt{-1})^2}.$$

Dass auch diese Gleichung rücksichtlich ihrer Form mit der Gleichung 2. in §. 42. ganz übereinstimmt, fällt sogleich in die Augen.

§. 86.

Lehrsatz. Jede imaginäre Grösse von der Form $\alpha \pm \beta \sqrt{-1}$, wo α und β beliebige reelle Grössen bezeichnen, kann immer auf die Form

$$\rho (\cos \varphi \pm \sin \varphi \sqrt{-1}) ,$$

wo ρ eine reelle positive Grösse bezeichnet, und auch φ stets reell ist, gebracht werden.

Beweis. Dieser in vieler Beziehung wichtige Satz wird bewiesen seyn, wenn man zeigen kann, dass ρ und φ sich immer so bestimmen lassen, dass den beiden Gleichungen

$$\rho \cos \varphi = \alpha, \quad \rho \sin \varphi = \beta$$

genügt wird, und ρ eine reelle positive, φ eine reelle Grösse ist.

Aus den beiden zu erfüllenden Gleichungen folgt

$$\alpha^2 + \beta^2 = \rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi),$$

d. i.

$$\alpha^2 + \beta^2 = \rho^2;$$

also

$$\varrho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$$

die Quadratwurzel, damit ϱ positiv sey, positiv genommen.

Nachdem auf diese Weise ϱ bestimmt ist, muss nun φ so bestimmt werden, dass den beiden Gleichungen

$$\cos \varphi = \frac{\alpha}{\varrho} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}},$$

$$\sin \varphi = \frac{\beta}{\varrho} = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}},$$

oder

$$\varphi = \text{Arc cos } \frac{\alpha}{\varrho} = \text{Arc cos } \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}},$$

$$\varphi = \text{Arc sin } \frac{\beta}{\varrho} = \text{Arc sin } \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

zugleich genügt wird.

Dass dies immer möglich ist, fällt sogleich in die Augen, wenn man nur bedenkt, dass

$$\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right)^2 + \left(\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right)^2 = 1$$

ist.

Zu bemerken hat man nur, dass, wenn α und β beide positiv sind, der Bogen φ sich im ersten Quadranten endigen muss; sind dagegen α und β beide negativ, so muss der Bogen φ sich im dritten Quadranten endigen; ist α positiv und β negativ, so muss sich φ im vierten Quadranten endigen; ist endlich α negativ und β positiv, so muss sich φ im zweiten Quadranten endigen. Uebrigens kann φ positiv oder negativ seyn, und kann überhaupt unendlich viele verschiedene Werthe haben.

§. 87.

Lehrsatz. Das Product der imaginären Grössen

$$\cos \varphi \pm \sin \varphi \sqrt{-1}, \cos \varphi_1 \pm \sin \varphi_1 \sqrt{-1}, \dots \cos \varphi_{n-1} \pm \sin \varphi_{n-1} \sqrt{-1},$$

wo $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_{n-1}$ beliebige Winkel oder Bogen bezeichnen, ist die Grösse

$$\cos(\varphi + \varphi_1 + \dots + \varphi_{n-1}) \pm \sin(\varphi + \varphi_1 + \dots + \varphi_{n-1}) \sqrt{-1}.$$

Beweis. Es ist, wie man nach leichter Rechnung findet,

$$(\cos \varphi \pm \sin \varphi \sqrt{-1})(\cos \varphi_1 \pm \sin \varphi_1 \sqrt{-1})$$

$$= \cos \varphi \cos \varphi_1 - \sin \varphi \sin \varphi_1$$

$$\pm (\sin \varphi \cos \varphi_1 + \cos \varphi \sin \varphi_1) \sqrt{-1}.$$

Weil nun nach einem sehr bekannten goniometrischen Satze

$$\cos(\varphi + \varphi_1) = \cos \varphi \cos \varphi_1 - \sin \varphi \sin \varphi_1,$$

$$\sin(\varphi + \varphi_1) = \sin \varphi \cos \varphi_1 + \cos \varphi \sin \varphi_1$$

ist; so ist

$$\begin{aligned} & (\cos \varphi \pm \sin \varphi \sqrt{-1}) (\cos \varphi_1 \pm \sin \varphi_1 \sqrt{-1}) \\ & = \cos (\varphi + \varphi_1) \pm \sin (\varphi + \varphi_1) \cdot \sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} & (\cos \varphi \pm \sin \varphi \sqrt{-1}) (\cos \varphi_1 \pm \sin \varphi_1 \sqrt{-1}) (\cos \varphi_2 \pm \sin \varphi_2 \sqrt{-1}) \\ & = \{ \cos (\varphi + \varphi_1) \pm \sin (\varphi + \varphi_1) \cdot \sqrt{-1} \} (\cos \varphi_2 \pm \sin \varphi_2 \sqrt{-1}) \\ & = \cos (\varphi + \varphi_1 + \varphi_2) \pm \sin (\varphi + \varphi_1 + \varphi_2) \cdot \sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Da man nun auf diese Art offenbar immer weiter gehen kann; so erhellet die Richtigkeit des zu beweisenden Satzes.

§. 88.

Lehrsatz. Wenn n eine positive oder negative ganze Zahl ist; so ist jederzeit

$$(\cos \varphi \pm \sin \varphi \sqrt{-1})^n = \cos n\varphi \pm \sin n\varphi \cdot \sqrt{-1}.$$

Beweis. I. Wenn n eine positive ganze Zahl ist; so folgt der Satz unmittelbar aus §. 87., wenn man dort, wie es offenbar verstattet ist, $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \dots = \varphi_{n-1}$ setzt.

II. Ist ferner n eine negative ganze Zahl, so ist bekanntlich

$$(\cos \varphi \pm \sin \varphi \sqrt{-1})^n = \frac{1}{(\cos \varphi \pm \sin \varphi \sqrt{-1})^{-n}};$$

also, weil $-n$ eine positive ganze Zahl ist, nach I.

$$(\cos \varphi \pm \sin \varphi \sqrt{-1})^n = \frac{1}{\cos (-n\varphi) \pm \sin (-n\varphi) \cdot \sqrt{-1}},$$

oder, weil bekanntlich

$$\cos (-n\varphi) = \cos n\varphi, \quad \sin (-n\varphi) = -\sin n\varphi$$

ist,

$$(\cos \varphi \pm \sin \varphi \sqrt{-1})^n = \frac{1}{\cos n\varphi \mp \sin n\varphi \cdot \sqrt{-1}},$$

und folglich, wenn man Zähler und Nenner des Bruchs auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens mit

$$\cos n\varphi \pm \sin n\varphi \cdot \sqrt{-1}$$

multiplicirt,

$$(\cos \varphi \pm \sin \varphi \sqrt{-1})^n = \frac{\cos n\varphi \pm \sin n\varphi \cdot \sqrt{-1}}{(\cos n\varphi)^2 + (\sin n\varphi)^2},$$

d. i., weil

$$(\cos n\varphi)^2 + (\sin n\varphi)^2 = 1$$

ist, auch in diesem Falle

$$(\cos \varphi \pm \sin \varphi \sqrt{-1})^n = \cos n\varphi \pm \sin n\varphi \cdot \sqrt{-1},$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 89.

Wir wollen nun auch die Potenz

$$(\cos \varphi \pm \sin \varphi \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}},$$

wo m und n ganze Zahlen bezeichnen sollen, einer genauern Untersuchung unterwerfen, vorzüglich diese Potenz auf die Form

$$p + q \sqrt{-1},$$

oder, was nach §. 86. dasselbe ist, auf die Form

$$\varrho (\cos \psi + \sin \psi \sqrt{-1}),$$

wo ϱ eine reelle positive Grösse und auch ψ reell ist, zu bringen suchen.

Die Gleichung

$$(\cos \varphi \pm \sin \varphi \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}} = \varrho (\cos \psi + \sin \psi \sqrt{-1})$$

ist erfüllt, wenn die Gleichung

$$(\cos \varphi \pm \sin \varphi \sqrt{-1})^m = \varrho^n (\cos \psi + \sin \psi \sqrt{-1})^n,$$

d. i. nach §. 88., weil m und n ganze Zahlen sind, wenn die Gleichung

$$\cos m\varphi \pm \sin m\varphi \cdot \sqrt{-1} = \varrho^n (\cos n\psi + \sin n\psi \cdot \sqrt{-1})$$

erfüllt ist.

Letztere Gleichung ist aber erfüllt, wenn die beiden Gleichungen

$$\cos m\varphi = \varrho^n \cos n\psi, \quad \pm \sin m\varphi = \varrho^n \sin n\psi$$

erfüllt sind, und wir müssen also jetzt ϱ und ψ diesen beiden Gleichungen gemäss und zugleich so zu bestimmen suchen, dass ϱ eine reelle positive, ψ eine reelle Grösse ist.

Quadriert man die beiden in Rede stehenden Gleichungen und addirt sie dann zu einander; so erhält man

$$\varrho^{2n} = 1,$$

und folglich, weil ϱ reell und positiv seyn soll,

$$\varrho = 1.$$

Nachdem auf diese Weise ϱ bestimmt ist, muss nun ferner ψ so bestimmt werden, dass den beiden Gleichungen

$$\cos m\varphi = \cos n\psi, \quad \pm \sin m\varphi = \sin n\psi$$

oder

$$\cos (\pm m\varphi) = \cos n\psi, \quad \sin (\pm m\varphi) = \sin n\psi$$

zugleich genügt wird.

Nach bekannten goniometrischen Sätzen erfordert die erste dieser beiden Gleichungen, dass, indem k eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet, entweder

$$n\psi = 2k\pi \pm m\varphi$$

oder

$$n\psi = 2k\pi \mp m\varphi$$

ist.

Die zweite der beiden obigen Gleichungen erfordert dagegen, dass entweder

$$n\psi = 2k\pi \pm m\varphi$$

oder

$$n\psi = (2k+1)\pi \mp m\varphi$$

ist.

Da nun beide Gleichungen zugleich erfüllt seyn sollen; so muss offenbar

$$n\psi = 2k\pi \pm m\varphi$$

oder

$$\psi = \frac{2k\pi \pm m\varphi}{n}$$

seyn, wo k immer eine ganz beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet.

Nach dem Obigen ist also für jedes positive oder negative ganze k

$$(\cos \varphi \pm \sin \varphi \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}} = \cos \frac{2k\pi \pm m\varphi}{n} + \sin \frac{2k\pi \pm m\varphi}{n} \sqrt{-1},$$

oder auch, weil

$$\cos \frac{2k\pi \pm m\varphi}{n} = \cos \frac{\pm(m\varphi \pm 2k\pi)}{n} = \cos \frac{m\varphi \pm 2k\pi}{n},$$

$$\sin \frac{2k\pi \pm m\varphi}{n} = \sin \frac{\pm(m\varphi \pm 2k\pi)}{n} = \pm \sin \frac{m\varphi \pm 2k\pi}{n}$$

ist, für jedes positive oder negative ganze k ,

$$(\cos \varphi \pm \sin \varphi \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}} = \cos \frac{m\varphi \pm 2k\pi}{n} \pm \sin \frac{m\varphi \pm 2k\pi}{n} \sqrt{-1}.$$

Uebrigens erhellet aber leicht, dass man unbeschadet der nöthigen Allgemeinheit auch bloss

$$(\cos \varphi \pm \sin \varphi \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}} = \cos \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} \pm \sin \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} \sqrt{-1}$$

setzen kann, wenn man nur k immer jede positive oder negative ganze Zahl bezeichnen lässt.

Man sieht hieraus, dass die Potenz

$$(\cos \varphi \pm \sin \varphi \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

nicht bloss einen, sondern, weil k jede beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet, eigentlich unendlich viele Werthe hat, wobei sich aber immer noch fragen lässt, ob diese unendlich vielen Werthe auch wirklich sämmtlich von einander verschieden sind, oder ob unter denselben nicht vielleicht welche vorkommen, die einander gleich sind. In der That lässt sich, wie jetzt geschehen soll, zeigen, dass die Gleichung

$$(\cos \varphi \pm \sin \varphi \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}} = \cos \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} \pm \sin \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} \sqrt{-1}$$

immer nur eine endliche völlig bestimmte Anzahl unter einander verschiedener Werthe der Potenz

$$(\cos \varphi \pm \sin \varphi \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

liefert.

Wir nehmen, was offenbar verstatet ist, bei dieser Untersuchung n als positiv an, und unterscheiden nun zwei Fälle, jenachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

I. Wenn n eine gerade Zahl ist, so sey $n = 2\theta$.

Ueberhaupt sey nun

$$k = \pm (\theta\lambda + \theta'),$$

wo λ eine positive ganze Zahl und $\theta' < \theta$ ist; so ist

$$\cos \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} = \cos \frac{m\varphi \pm 2(\theta\lambda + \theta')\pi}{n},$$

$$\sin \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} = \sin \frac{m\varphi \pm 2(\theta\lambda + \theta')\pi}{n},$$

d. i., weil $n = 2\theta$ ist,

$$\cos \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} = \cos \left(\frac{m\varphi \pm 2\theta'\pi}{n} \pm \lambda\pi \right),$$

$$\sin \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} = \sin \left(\frac{m\varphi \pm 2\theta'\pi}{n} \pm \lambda\pi \right).$$

Ist nun λ eine gerade Zahl; so ist

$$\cos \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} = \cos \frac{m\varphi \pm 2\theta'\pi}{n},$$

$$\sin \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} = \sin \frac{m\varphi \pm 2\theta'\pi}{n},$$

und folglich

$$\begin{aligned} & \cos \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} + \sin \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} \sqrt{-1} \\ &= \cos \frac{m\varphi \pm 2\theta'\pi}{n} + \sin \frac{m\varphi \pm 2\theta'\pi}{n} \sqrt{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cos \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} - \sin \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} \sqrt{-1} \\ &= \cos \frac{m\varphi \pm 2\theta'\pi}{n} - \sin \frac{m\varphi \pm 2\theta'\pi}{n} \sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Ist aber λ eine ungerade, also $\lambda + 1$ eine gerade Zahl; so kann man

$$\cos \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} = \cos \left\{ \frac{m\varphi \pm 2\theta'\pi}{n} \pm (\lambda + 1)\pi \right\},$$

$$\sin \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} = \sin \left\{ \frac{m\varphi \pm 2\theta'\pi}{n} \pm (\lambda + 1)\pi \right\},$$

oder

$$\cos \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} = \cos \left\{ \frac{m\varphi + 2(\theta - \theta')\pi}{n} \pm (\lambda + 1)\pi \right\},$$

$$\sin \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} = \sin \left\{ \frac{m\varphi + 2(\theta - \theta')\pi}{n} \pm (\lambda + 1)\pi \right\}$$

setzen. Dann ist, weil $\lambda + 1$ eine gerade Zahl ist,

$$\cos \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} = \cos \frac{m\varphi + 2(\theta - \theta')\pi}{n},$$

$$\sin \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} = \sin \frac{m\varphi + 2(\theta - \theta')\pi}{n},$$

und folglich

$$\begin{aligned} & \cos \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} + \sin \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} \sqrt{-1} \\ &= \cos \frac{m\varphi + 2(\theta - \theta')\pi}{n} + \sin \frac{m\varphi + 2(\theta - \theta')\pi}{n} \sqrt{-1}, \\ & \cos \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} - \sin \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} \sqrt{-1} \\ &= \cos \frac{m\varphi + 2(\theta - \theta')\pi}{n} - \sin \frac{m\varphi + 2(\theta - \theta')\pi}{n} \sqrt{-1}, \end{aligned}$$

wo $\theta - \theta'$ nie grösser als θ ist.

Aus dieser Darstellung geht hervor, dass man in der Gleichung

$$(\cos \varphi \pm \sin \varphi \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}} = \cos \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} \pm \sin \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} \sqrt{-1}$$

bloss

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \theta$$

zu setzen braucht, weil unter den auf diese Weise erhaltenen Werthen von

$$(\cos \varphi \pm \sin \varphi \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

nach dem Vorhergehenden offenbar alle übrigen enthalten sind.

Die Werthe von

$$(\cos \varphi + \sin \varphi \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}},$$

welche man auf diese Weise erhält, sind:

$$\cos \frac{m\varphi}{n} + \sin \frac{m\varphi}{n} \sqrt{-1},$$

$$\cos \frac{m\varphi \pm 2\pi}{n} + \sin \frac{m\varphi \pm 2\pi}{n} \sqrt{-1},$$

$$\cos \frac{m\varphi \pm 4\pi}{n} + \sin \frac{m\varphi \pm 4\pi}{n} \sqrt{-1},$$

$$\cos \frac{m\varphi \pm 6\pi}{n} + \sin \frac{m\varphi \pm 6\pi}{n} \sqrt{-1},$$

u. s. w.

$$\cos \frac{m\varphi \pm n\pi}{n} + \sin \frac{m\varphi \pm n\pi}{n} \sqrt{-1};$$

und eben so sind die Werthe von

$$(\cos \varphi - \sin \varphi \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}},$$

welche man auf die obige Weise erhält, folgende:

$$\cos \frac{m\varphi}{n} - \sin \frac{m\varphi}{n} \sqrt{-1},$$

$$\cos \frac{m\varphi \pm 2\pi}{n} - \sin \frac{m\varphi \pm 2\pi}{n} \sqrt{-1},$$

$$\cos \frac{m\varphi \pm 4\pi}{n} - \sin \frac{m\varphi \pm 4\pi}{n} \sqrt{-1},$$

$$\cos \frac{m\varphi \pm 6\pi}{n} - \sin \frac{m\varphi \pm 6\pi}{n} \sqrt{-1},$$

u. s. w.

$$\cos \frac{m\varphi \pm n\pi}{n} - \sin \frac{m\varphi \pm n\pi}{n} \sqrt{-1}.$$

In jeder dieser beiden Reihen sind offenbar $n + 1$ Werthe enthalten, und es fragt sich nun, ob in jeder der beiden Reihen diese $n + 1$ Werthe sämmtlich unter einander verschieden sind. Sollten aber zwei Werthe in einer der beiden Reihen einander gleich seyn; so müsste, indem weder $2\theta'$, noch $2\theta''$ grösser als n ist, entweder zugleich

$$\cos \frac{m\varphi \pm 2\theta'\pi}{n} = \cos \frac{m\varphi \pm 2\theta''\pi}{n},$$

$$\sin \frac{m\varphi \pm 2\theta'\pi}{n} = \sin \frac{m\varphi \pm 2\theta''\pi}{n},$$

oder zugleich

$$\cos \frac{m\varphi \pm 2\theta'\pi}{n} = \cos \frac{m\varphi \pm 2\theta''\pi}{n},$$

$$\sin \frac{m\varphi \pm 2\theta'\pi}{n} = \sin \frac{m\varphi \pm 2\theta''\pi}{n}$$

seyn.

Im ersten Falle müsste, wenn k wieder eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet,

$$\frac{m\varphi \pm 2\theta'\pi}{n} = \frac{m\varphi \pm 2\theta''\pi}{n} + 2k\pi,$$

d. i.

$$\pm \theta' = \pm \theta'' + kn$$

oder

$$\pm (\theta' - \theta'') = kn$$

seyn, welches, da weder θ' , noch θ'' grösser als $\frac{1}{2}n$ ist, offenbar ungereimt ist.

Im zweiten Falle müsste

$$\frac{m\varphi \pm 2\theta'\pi}{n} = \frac{m\varphi \pm 2\theta''\pi}{n} + 2k\pi,$$

d. i.

$$\pm \theta' = \pm \theta'' + kn$$

oder

$$\pm (\theta' + \theta'') = kn$$

seyn. Dies ist aber, weil weder θ' , noch θ'' grösser als $\frac{1}{2}n$ ist, nur dann möglich, wenn

$$\theta' = \theta'' = \frac{1}{2}n$$

oder

$$2\theta' = 2\theta'' = n$$

ist; und in der That ist auch

$$\cos \frac{m\varphi \pm n\pi}{n} = \cos \left(\frac{m\varphi}{n} \pm \pi \right) = -\cos \frac{m\varphi}{n},$$

$$\sin \frac{m\varphi \pm n\pi}{n} = \sin \left(\frac{m\varphi}{n} \pm \pi \right) = -\sin \frac{m\varphi}{n},$$

so dass sich also sowohl die beiden Werthe

$$\cos \frac{m\varphi \pm n\pi}{n} + \sin \frac{m\varphi \pm n\pi}{n} \sqrt{-1},$$

als auch die beiden Werthe

$$\cos \frac{m\varphi \pm n\pi}{n} - \sin \frac{m\varphi \pm n\pi}{n} \sqrt{-1},$$

auf einen Werth reduciren.

In den beiden obigen Reihen sind folglich, mit Ausnahme der beiden letzten, alle Werthe unter einander ungleich, und die erste Reihe enthält also n sämmtlich unter einander ungleiche Werthe der Grösse

$$(\cos \varphi + \sin \varphi \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}},$$

die zweite Reihe dagegen n sämmtlich unter einander ungleiche Werthe der Grösse

$$(\cos \varphi - \sin \varphi \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}.$$

II. Ist ferner n eine ungerade Zahl, so sey $n = 2\theta + 1$.

Ueberhaupt sey

$$2k = \pm ((2\theta + 1)\lambda + \theta')$$

wo λ eine positive ganze Zahl und $\theta' < 2\theta + 1$ ist; so ist

$$\cos \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} = \cos \frac{m\varphi \pm ((2\theta + 1)\lambda + \theta')\pi}{n},$$

$$\sin \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} = \sin \frac{m\varphi \pm (2\theta + 1)\lambda + \theta'\pi}{n},$$

d. i. weil $n = 2\theta + 1$ ist,

$$\cos \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} = \cos \left(\frac{m\varphi \pm \theta'\pi}{n} \pm \lambda\pi \right),$$

$$\sin \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} = \sin \left(\frac{m\varphi \pm \theta'\pi}{n} \pm \lambda\pi \right).$$

Ist nun λ eine gerade Zahl; so ist

$$\cos \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} = \cos \frac{m\varphi \pm \theta'\pi}{n},$$

$$\sin \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} = \sin \frac{m\varphi \pm \theta'\pi}{n},$$

und folglich

$$\begin{aligned} & \cos \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} + \sin \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} \sqrt{-1} \\ &= \cos \frac{m\varphi \pm \theta'\pi}{n} + \sin \frac{m\varphi \pm \theta'\pi}{n} \sqrt{-1}, \\ & \cos \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} - \sin \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} \sqrt{-1} \\ &= \cos \frac{m\varphi \pm \theta'\pi}{n} - \sin \frac{m\varphi \pm \theta'\pi}{n} \sqrt{-1}, \end{aligned}$$

wobei zu bemerken ist, dass in diesem Falle, wegen der Gleichung

$$2k = \pm (2\theta + 1)\lambda + \theta',$$

θ' eine gerade Zahl und nicht grösser als 2θ ist.

Ist λ eine ungerade, also $\lambda + 1$ eine gerade Zahl; so kann man wieder

$$\cos \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} = \cos \left\{ \frac{m\varphi \pm \theta'\pi}{n} \pm (\lambda + 1)\pi \mp \pi \right\},$$

$$\sin \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} = \sin \left\{ \frac{m\varphi \pm \theta'\pi}{n} \pm (\lambda + 1)\pi \mp \pi \right\},$$

oder

$$\cos \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} = \cos \left\{ \frac{m\varphi \mp (n - \theta')\pi}{n} \pm (\lambda + 1)\pi \right\},$$

$$\sin \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} = \sin \left\{ \frac{m\varphi \mp (n - \theta')\pi}{n} \pm (\lambda + 1)\pi \right\},$$

d. i., weil $\lambda + 1$ eine gerade Zahl ist,

$$\cos \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} = \cos \frac{m\varphi \mp (n - \theta')\pi}{n},$$

$$\sin \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} = \sin \frac{m\varphi \mp (n - \theta')\pi}{n}$$

setzen, so dass also in diesem Falle

$$\begin{aligned} & \cos \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} + \sin \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} \sqrt[n]{-1} \\ &= \cos \frac{m\varphi + (n-\theta')\pi}{n} + \sin \frac{m\varphi + (n-\theta')\pi}{n} \sqrt[n]{-1}, \\ & \cos \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} - \sin \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} \sqrt[n]{-1} \\ &= \cos \frac{m\varphi + (n-\theta')\pi}{n} - \sin \frac{m\varphi + (n-\theta')\pi}{n} \sqrt[n]{-1} \end{aligned}$$

ist.

Wegen der Gleichung

$$2k = \pm ((2\theta + 1) \lambda + \theta')$$

ist in diesem Falle θ' ungerade, und folglich, weil n ungerade ist, $n - \theta'$ gerade; auch erhellet auf der Stelle, dass $n - \theta'$ nicht grösser als 2θ seyn kann.

Aus dieser Darstellung geht nun hervor, dass man im vorliegenden Falle in der Gleichung

$$(\cos \varphi \pm \sin \varphi \sqrt[n]{-1})^{\frac{m}{n}} = \cos \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} \pm \sin \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} \sqrt[n]{-1}$$

bloss

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \pm \theta$$

zu setzen braucht, weil auf die dadurch sich ergebenden Werthe von

$$(\cos \varphi \pm \sin \varphi \sqrt[n]{-1})^{\frac{m}{n}}$$

nach dem Vorhergehenden offenbar alle übrigen zurückkommen.

Die auf diese Weise sich ergebenden Werthe von

$$(\cos \varphi \pm \sin \varphi \sqrt[n]{-1})^{\frac{m}{n}}$$

sind:

$$\begin{aligned} & \cos \frac{m\varphi}{n} + \sin \frac{m\varphi}{n} \sqrt[n]{-1}, \\ & \cos \frac{m\varphi \pm 2\pi}{n} + \sin \frac{m\varphi \pm 2\pi}{n} \sqrt[n]{-1}, \\ & \cos \frac{m\varphi \pm 4\pi}{n} + \sin \frac{m\varphi \pm 4\pi}{n} \sqrt[n]{-1}, \\ & \cos \frac{m\varphi \pm 6\pi}{n} + \sin \frac{m\varphi \pm 6\pi}{n} \sqrt[n]{-1}, \end{aligned}$$

u. s. w.

$$\cos \frac{m\varphi \pm (n-1)\pi}{n} + \sin \frac{m\varphi \pm (n-1)\pi}{n} \sqrt[n]{-1};$$

und eben so ergeben sich auf die obige Weise für

$$(\cos \varphi - \sin \varphi \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

die folgenden Werthe:

$$\cos \frac{m\varphi}{n} - \sin \frac{m\varphi}{n} \sqrt{-1},$$

$$\cos \frac{m\varphi \pm 2\pi}{n} - \sin \frac{m\varphi \pm 2\pi}{n} \sqrt{-1},$$

$$\cos \frac{m\varphi \pm 4\pi}{n} - \sin \frac{m\varphi \pm 4\pi}{n} \sqrt{-1},$$

$$\cos \frac{m\varphi \pm 6\pi}{n} - \sin \frac{m\varphi \pm 6\pi}{n} \sqrt{-1},$$

u. s. w.

$$\cos \frac{m\varphi \pm (n-1)\pi}{n} - \sin \frac{m\varphi \pm (n-1)\pi}{n} \sqrt{-1}.$$

In jeder dieser beiden Reihen sind offenbar n Werthe enthalten, und es fragt sich nun noch, ob die in jeder dieser beiden Reihen enthaltenen n Werthe sämmtlich unter einander ungleich sind. Sollten aber in einer der beiden Reihen zwei Werthe einander gleich seyn; so müsste, indem weder 2θ , noch $2\theta''$ grösser als $n-1$ ist, entweder zugleich

$$\cos \frac{m\varphi' \pm 2\theta'\pi}{n} = \cos \frac{m\varphi \pm 2\theta''\pi}{n},$$

$$\sin \frac{m\varphi \pm 2\theta'\pi}{n} = \sin \frac{m\varphi \pm 2\theta''\pi}{n};$$

oder zugleich

$$\cos \frac{m\varphi \pm 2\theta'\pi}{n} = \cos \frac{m\varphi \pm 2\theta''\pi}{n},$$

$$\sin \frac{m\varphi \pm 2\theta'\pi}{n} = \sin \frac{m\varphi \pm 2\theta''\pi}{n}$$

seyn.

Im ersten Falle erhält man wie in I.

$$\pm (\theta' - \theta'') = kn,$$

im zweiten dagegen

$$\pm (\theta' + \theta'') = kn.$$

Beides ist unmöglich, weil weder θ' noch θ'' grösser als $\frac{1}{2}(n-1)$ ist. Daher enthält die erste der beiden obigen Reihen n sämmtlich unter einander ungleiche Werthe der Grösse

$$(\cos \varphi + \sin \varphi \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}},$$

die zweite n sämmtlich unter einander ungleiche Werthe der Grösse

$$(\cos \varphi - \sin \varphi \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}.$$

III. Fasst man alles Vorhergehende zusammen; so ergibt sich, dass man, um alle ungleichen Werthe der Grösse

$$(\cos \varphi \pm \sin \varphi \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

zu erhalten, in der Gleichung

$$(\cos \varphi \pm \sin \varphi \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}} = \cos \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} \pm \sin \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} \sqrt{-1}$$

die Grösse k nicht grösser als $+\frac{1}{2}n$ und nicht kleiner als $-\frac{1}{2}n$ zu nehmen braucht, so dass man also für k immer bloss alle von $-\frac{1}{2}n$ bis $+\frac{1}{2}n$ sich findenden ganzen Zahlen zu setzen braucht. Jedoch hat man hierbei noch zu bemerken, dass, wenn n eine gerade Zahl ist, der erste und letzte der auf diese Weise erhaltenen Werthe von

$$(\cos \varphi \pm \sin \varphi \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

jederzeit einander gleich sind, in dem in Rede stehenden Falle also immer der eine der beiden äussersten Werthe, etwa der letzte, d. i. der der Grösse $k = +\frac{1}{2}n$ entsprechende Werth, weggelassen werden muss. Thut man dies; so erhält man durch das angegebene Verfahren immer n sämmtlich unter einander verschiedene Werthe der Grösse

$$(\cos \varphi \pm \sin \varphi \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}.$$

§. 90.

Unter der Voraussetzung, dass n eine positive oder negative ganze Zahl ist, und u, v reelle Functionen von x bezeichnen, wollen wir nun das Differential der Function

$$y = (u + v \sqrt{-1})^n$$

zu entwickeln suchen.

Setzen wir, wie dies nach §. 86. verstattet ist,

$$u + v \sqrt{-1} = \varrho (\cos \varphi + \sin \varphi \sqrt{-1});$$

so ist nach §. 88.

$$y = \varrho^n (\cos n\varphi + \sin n\varphi \sqrt{-1}).$$

Weil nun, wie man leicht findet,

$$\partial . \varrho^n \cos n\varphi = -n\varrho^n \sin n\varphi \partial \varphi + n\varrho^{n-1} \cos n\varphi \partial \varrho,$$

$$\partial . \varrho^n \sin n\varphi = n\varrho^n \cos n\varphi \partial \varphi + n\varrho^{n-1} \sin n\varphi \partial \varrho$$

ist; so ist nach §. 79.

$$\begin{aligned} \partial y &= n\varrho^{n-1} (\cos n\varphi \partial \varrho - \varrho \sin n\varphi \partial \varphi) \\ &\quad + n\varrho^{n-1} (\sin n\varphi \partial \varrho + \varrho \cos n\varphi \partial \varphi) \sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Nach §. 88. ist aber

$$(u + v \sqrt{-1})^{n-1} = \varrho^{n-1} \{ \cos (n-1)\varphi + \sin (n-1)\varphi \cdot \sqrt{-1} \},$$

und weil

$$\partial . \varrho \cos \varphi = - \varrho \sin \varphi \partial \varphi + \cos \varphi \partial \varrho ,$$

$$\partial . \varrho \sin \varphi = \varrho \cos \varphi \partial \varphi + \sin \varphi \partial \varrho$$

ist; so ist nach §. 79.

$$\begin{aligned} \partial(u + v \sqrt{-1}) &= \cos \varphi \partial \varrho - \varrho \sin \varphi \partial \varphi \\ &\quad + (\sin \varphi \partial \varrho + \varrho \cos \varphi \partial \varphi) \sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Folglich ist, wie man durch gemeine Multiplication leicht findet,

$$\begin{aligned} &(u + v \sqrt{-1})^{n-1} \partial(u + v \sqrt{-1}) \\ &= \varrho^{n-1} \{ \cos(n-1) \varphi \cos \varphi - \sin(n-1) \varphi \sin \varphi \} \partial \varrho \\ &\quad - \varrho^n \{ \sin(n-1) \varphi \cos \varphi + \cos(n-1) \varphi \sin \varphi \} \partial \varphi \\ &\quad + \varrho^{n-1} \{ \sin(n-1) \varphi \cos \varphi + \cos(n-1) \varphi \sin \varphi \} \partial \varrho \cdot \sqrt{-1} \\ &\quad + \varrho^n \{ \cos(n-1) \varphi \cos \varphi - \sin(n-1) \varphi \sin \varphi \} \partial \varphi \cdot \sqrt{-1} \\ &= \varrho^{n-1} (\cos n \varphi \partial \varrho - \varrho \sin n \varphi \partial \varphi) \\ &\quad + \varrho^{n-1} (\sin n \varphi \partial \varrho + \varrho \cos n \varphi \partial \varphi) \sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Vergleicht man dies nun mit dem Obigen; so erhält man

$$\partial y = n(u + v \sqrt{-1})^{n-1} \partial(u + v \sqrt{-1}),$$

und wird nun auch sogleich die Uebereinstimmung dieser Formel mit der Formel 2. in §. 45. erkennen.

§. 91.

Ist

$$y = (u + v \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

wo m und n ganze Zahlen, u und v reelle Functionen von x bezeichnen; so ist, wenn wir, wie es nach §. 86. verstattet ist,

$$u + v \sqrt{-1} = \varrho (\cos \varphi + \sin \varphi \sqrt{-1})$$

setzen,

$$y = \varrho^{\frac{m}{n}} (\cos \varphi + \sin \varphi \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}},$$

und folglich nach §. 89. für jedes positive oder negative ganze k

$$y = \varrho^{\frac{m}{n}} \left(\cos \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} + \sin \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} \sqrt{-1} \right).$$

Ist nun überhaupt von dem Differential der Function y die Rede; so muss man dabei offenbar immer irgend einen bestimmten Werth dieser Function in's Auge fassen, und das Differential dieses Werthes entwickeln, d. h. man muss überhaupt das Differential des vorher für y gefundenen allgemeinen Ausdrucks entwickeln, indem man, was wohl zu merken ist, bei dieser Entwicklung die Grösse k als constant betrachtet.

Diese Entwicklung lässt sich aber auf eine ganz ähnliche Art wie die Entwicklung im vorigen Paragraphen ausführen.

Weil nämlich, wie man leicht findet,

$$\begin{aligned} & \partial \cdot \varrho^{\frac{m}{n}} \cos \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} \\ &= -\frac{m}{n} \varrho^{\frac{m}{n}} \sin \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} \partial\varphi + \frac{m}{n} \varrho^{\frac{m-n}{n}} \cos \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} \partial\varrho, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \partial \cdot \varrho^{\frac{m}{n}} \sin \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} \\ &= \frac{m}{n} \varrho^{\frac{m}{n}} \cos \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} \partial\varphi + \frac{m}{n} \varrho^{\frac{m-n}{n}} \sin \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} \partial\varrho \end{aligned}$$

ist; so ist nach §. 79.

$$\begin{aligned} \partial y &= \frac{m}{n} \varrho^{\frac{m-n}{n}} \left(\cos \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} \partial\varrho - \varrho \sin \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} \partial\varphi \right) \\ &+ \frac{m}{n} \varrho^{\frac{m-n}{n}} \left(\sin \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} \partial\varrho + \varrho \cos \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} \partial\varphi \right) r^{-1}. \end{aligned}$$

Ferner ist wie in §. 90.

$$\begin{aligned} \partial(u + v r^{-1}) &= \cos \varphi \partial\varrho - \varrho \sin \varphi \partial\varphi \\ &+ (\sin \varphi \partial\varrho + \varrho \cos \varphi \partial\varphi) r^{-1}. \end{aligned}$$

Multipliziert man nun diese Grösse mit der Grösse

$$\varrho^{\frac{m-n}{n}} \left\{ \cos \frac{(m-n)\varphi + 2k\pi}{n} + \sin \frac{(m-n)\varphi + 2k\pi}{n} r^{-1} \right\};$$

so erhält man als Product die Grösse

$$\begin{aligned} & \varrho^{\frac{m-n}{n}} \left(\cos \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} \partial\varrho - \varrho \sin \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} \partial\varphi \right) \\ &+ \varrho^{\frac{m-n}{n}} \left(\sin \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} \partial\varrho + \varrho \cos \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} \partial\varphi \right) r^{-1}, \end{aligned}$$

und schliesst nun hieraus in Verbindung mit dem Obigen sogleich, dass

$$\partial y = \frac{m}{n} \varrho^{\frac{m-n}{n}} \left\{ \cos \frac{(m-n)\varphi + 2k\pi}{n} + \sin \frac{(m-n)\varphi + 2k\pi}{n} r^{-1} \right\} \partial(u + v r^{-1})$$

ist.

Weil aber nach §. 89. für jedes positive oder negative ganze k

$$\begin{aligned} & (u + v r^{-1})^{\frac{m}{n} - 1} \\ &= \varrho^{\frac{m-n}{n}} \left\{ \cos \frac{(m-n)\varphi + 2k\pi}{n} + \sin \frac{(m-n)\varphi + 2k\pi}{n} r^{-1} \right\} \end{aligned}$$

ist; so kann man auch

$$\partial y = \frac{m}{n} (u + v\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}-1} \partial(u + v\sqrt{-1})$$

setzen, wenn man nur nicht aus dem Auge verliert, dass diese Gleichung bloss so viel sagen will, dass der analytische Ausdruck auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens der Inbegriff aller der Werthe ist, welche das Differential ∂y haben kann.

Viertes Kapitel.

Von den höhern Differentialen der Functionen mit einer veränderlichen Grösse.

§. 92.

Den Differentialquotienten der Function $y = f(x)$, nach dem im vorhergehenden Kapitel entwickelten allgemeinen Begriffe, wollen wir jetzt den ersten Differentialquotienten dieser Function nennen.

Da dieser erste Differentialquotient

$$\frac{\partial y}{\partial x} = y' = f'(x)$$

im Allgemeinen selbst eine Function von x ist; so kann man von demselben wieder den ersten Differentialquotienten nehmen. Dieser erste Differentialquotient des ersten Differentialquotienten der Function $y = f(x)$ heisst der zweite Differentialquotient dieser Function, und wird durch

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = y'' = f''(x)$$

bezeichnet.

Dieser zweite Differentialquotient der Function $y = f(x)$ ist wieder im Allgemeinen eine Function von x , und man kann also von demselben wieder den ersten Differentialquotienten nehmen. Dieser erste Differentialquotient des zweiten Differentialquotienten der Function $y = f(x)$ heisst der dritte Differentialquotient dieser Function, und wird durch

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = y''' = f'''(x)$$

bezeichnet.

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar.

Der n te Differentialquotient der Function $y = f(x)$, welcher durch

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = y^{(n)} = f^{(n)}(x)$$

bezeichnet wird, ist der erste Differentialquotient des $(n-1)$ sten Differentialquotienten der in Rede stehenden Function, so dass also überhaupt

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = \frac{\partial \left(\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} \right)}{\partial x}$$

ist.

Unter dem n ten Differential der Function y , welches durch $\partial^n y$ bezeichnet wird, versteht man das Product, welches man erhält, wenn man den n ten Differentialquotienten mit Δx^n multiplicirt, so dass also

$$\partial^n y = \frac{\partial^n y}{\partial x^n} \Delta x^n,$$

oder, wenn man auch hier wieder ∂x statt Δx schreibt,

$$\partial^n y = \frac{\partial^n y}{\partial x^n} \partial x^n$$

ist.

Eben so ist also auch

$$\partial^{n+1} y = \frac{\partial^{n+1} y}{\partial x^{n+1}} \partial x^{n+1}.$$

Nimmt man nun, ∂x als constant betrachtend, nach §. 37. von $\partial^n y$ das erste Differential; so erhält man

$$\partial(\partial^n y) = \partial \left(\frac{\partial^n y}{\partial x^n} \right) \cdot \partial x^n.$$

Nun ist aber bekanntlich

$$\partial \left(\frac{\partial^n y}{\partial x^n} \right) = \frac{\partial \left(\frac{\partial^n y}{\partial x^n} \right)}{\partial x} \partial x,$$

oder, weil nach dem Obigen

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial^n y}{\partial x^n} \right)}{\partial x} = \frac{\partial^{n+1} y}{\partial x^{n+1}}$$

ist,

$$\partial \left(\frac{\partial^n y}{\partial x^n} \right) = \frac{\partial^{n+1} y}{\partial x^{n+1}} \partial x.$$

Also ist

$$\partial(\partial^n y) = \frac{\partial^{n+1} y}{\partial x^{n+1}} \partial x^{n+1},$$

und folglich, wenn man dies mit dem Obigen vergleicht,

$$\partial^{n+1} y = \partial(\partial^n y),$$

d. h. das $(n+1)$ ste Differential der Function y ist das erste Differential des n ten Differentials dieser Function, indem man bei der Differentiation ∂x als constant betrachtet.

Hiernach kann man also auch alle Differentiale einer Function durch successive Differentiation derselben entwickeln.

§. 93.

I. Wenn, indem a eine constante Grösse, p eine Function von x bezeichnet,

$$y = ap$$

ist; so findet man durch successive Differentiation leicht

$$\frac{\partial y}{\partial x} = a \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \partial y = a \partial p;$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = a \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad \partial^2 y = a \partial^2 p;$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = a \frac{\partial^3 p}{\partial x^3}, \quad \partial^3 y = a \partial^3 p;$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = a \frac{\partial^4 p}{\partial x^4}, \quad \partial^4 y = a \partial^4 p;$$

u. s. w.

u. s. w.

Folglich ist offenbar allgemein

$$1. \quad \frac{\partial^n y}{\partial x^n} = a \frac{\partial^n p}{\partial x^n}, \quad 2. \quad \partial^n y = a \partial^n p.$$

II. Wenn, indem a eine constante Grösse bezeichnet, und $p, q, s, \dots u$ Functionen von x sind,

$$y = a \pm p \pm q \pm s \pm \dots \pm u$$

ist; so ergibt sich durch successive Differentiation eben so leicht

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \pm \frac{\partial p}{\partial x} \pm \frac{\partial q}{\partial x} \pm \frac{\partial s}{\partial x} \pm \dots \pm \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \pm \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \pm \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \pm \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \pm \dots \pm \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \pm \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} \pm \frac{\partial^3 q}{\partial x^3} \pm \frac{\partial^3 s}{\partial x^3} \pm \dots \pm \frac{\partial^3 u}{\partial x^3},$$

u. s. w.

u. s. w.

und es ist folglich offenbar allgemein

$$1. \quad \frac{\partial^n y}{\partial x^n} = \pm \frac{\partial^n p}{\partial x^n} \pm \frac{\partial^n q}{\partial x^n} \pm \frac{\partial^n s}{\partial x^n} \pm \dots \pm \frac{\partial^n u}{\partial x^n}.$$

Multiplcirt man nun auf beiden Seiten dieser Gleichung mit ∂x^n ; so erhält man

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} \partial x^n = \pm \frac{\partial^n p}{\partial x^n} \partial x^n \pm \frac{\partial^n q}{\partial x^n} \partial x^n \pm \frac{\partial^n s}{\partial x^n} \partial x^n \pm \dots \pm \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \partial x^n,$$

d. i. nach §. 92.

$$2. \partial^n y = \pm \partial^n p \pm \partial^n q \pm \partial^n s \pm \dots \pm \partial^n u.$$

III. Wenn, indem p und q Functionen von x bezeichnen,

$$y = pq$$

ist; so erhält man durch successive Differentiation ebenfalls ohne Schwierigkeit

$$\frac{\partial y}{\partial x} = p \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} q;$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = p \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial x}$$

$$+ \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} q$$

$$= p \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} q;$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = p \frac{\partial^3 q}{\partial x^3} + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \frac{\partial q}{\partial x}$$

$$+ 2 \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} q$$

$$= p \frac{\partial^3 q}{\partial x^3} + 3 \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} q;$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = p \frac{\partial^4 q}{\partial x^4} + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial^3 q}{\partial x^3} + 3 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} \frac{\partial q}{\partial x}$$

$$+ 3 \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial^3 q}{\partial x^3} + 3 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial^4 p}{\partial x^4} q$$

$$= p \frac{\partial^4 q}{\partial x^4} + 4 \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial^3 q}{\partial x^3} + 6 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial^4 p}{\partial x^4} q;$$

u. s. w.

u. s. w.

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar.

Erwägt man nun, dass die numerischen Coefficienten in den vorhergehenden Gleichungen offenbar nach und nach ganz auf dieselbe Art entstehen wie die Binomial-Coefficienten (§. 14. IV. V.); so wird man sich sogleich von der Richtigkeit der folgenden allgemeinen Formel überzeugen:

$$1. \frac{\partial^n y}{\partial x^n} = p \frac{\partial^n q}{\partial x^n} + n_1 \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}} + n_2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \frac{\partial^{n-2} q}{\partial x^{n-2}} + \dots$$

$$\dots + n_{n-2} \frac{\partial^{n-2} p}{\partial x^{n-2}} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + n_{n-1} \frac{\partial^{n-1} p}{\partial x^{n-1}} \frac{\partial q}{\partial x} + n_n \frac{\partial^n p}{\partial x^n} q.$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten dieser Gleichung mit ∂x^n ; so erhält man nach §. 92.

$$2. \partial^n y = p \partial^n q + n_1 \partial p \partial^{n-1} q + n_2 \partial^2 p \partial^{n-2} q + \dots$$

$$\dots + n_{n-2} \partial^{n-2} p \partial^2 q + n_{n-1} \partial^{n-1} p \partial q + n_n \partial^n p q.$$

IV. Wenn, indem wieder p und q Functionen von x bezeichnen,

$$y = \frac{p}{q}$$

ist; so ist bekanntlich

$$\partial y = \frac{q \partial p - p \partial q}{q^2}.$$

Differentiirt man nun diese Gleichung von Neuem; so ergibt sich

$$\begin{aligned} \partial^2 y &= \frac{q^2 \partial(q \partial p - p \partial q) - 2(q \partial p - p \partial q) q \partial q}{q^4} \\ &= \frac{q^2(q \partial^2 p - p \partial^2 q) - 2(q \partial p - p \partial q) q \partial q}{q^4} \\ &= \frac{q(q \partial^2 p - p \partial^2 q) - 2(q \partial p - p \partial q) \partial q}{q^3}. \end{aligned}$$

Auf diese Art weiter zu gehen und zu ganz allgemeinen Formeln zu gelangen, würde gerade keine besondere Schwierigkeit haben. Indess fallen die Formeln weitläufig aus, und finden in dieser Allgemeinheit im Folgenden keine Anwendung. Daher mag die obige Andeutung hier genügen.

§. 94.

Für $y = x^n$ ist nach §. 44. und §. 37.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = nx^{n-1},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = n(n-1)x^{n-2},$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = n(n-1)(n-2)x^{n-3},$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4},$$

u. s. w.

Folglich ist offenbar allgemein

$$1. \quad \frac{\partial^k y}{\partial x^k} = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)x^{n-k},$$

und, wenn man auf beiden Seiten dieser Gleichung mit ∂x^k multiplicirt, nach §. 92.

$$2. \quad \partial^k y = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)x^{n-k} \partial x^k,$$

wobei man aber die aus §. 44. sich unmittelbar ergebende Bemerkung nicht zu übersehen hat, dass, wenn n ein in den kleinsten Zahlen ausgedrückter Bruch und der Nenner desselben eine gerade Zahl ist, x positiv seyn und die Potenz x^{n-k} mit demselben Vorzeichen genommen werden muss, mit welchem man $y = x^n$ genommen hat.

Wenn n eine positive ganze Zahl ist; so kann man $k=n$ setzen, und erhält dann

$$3. \quad \frac{\partial^n y}{\partial x^n} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n,$$

so dass also, wenn n eine positive ganze Zahl ist, der n te Differentialquotient von $y = x^n$ eine constante Grösse ist, und alle höhern Differentialquotienten dieser Function folglich verschwinden.

Multiplicirt man auf beiden Seiten der Gleichung 3. mit ∂x^n ; so erhält man nach §. 92.

$$4. \quad \partial^n y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n \partial x^n.$$

§. 95.

I. Wenn

$$y = f(x) = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots + A_n x^n$$

eine beliebige ganze rationale algebraische Function des n ten Grades ist; so ist nach §. 93. I. II.

$$\frac{\partial^k y}{\partial x^k} = f^{(k)}(x)$$

$$= A_1 \frac{\partial^k \cdot x}{\partial x^k} + A_2 \frac{\partial^k \cdot x^2}{\partial x^k} + A_3 \frac{\partial^k \cdot x^3}{\partial x^k} + \dots + A_n \frac{\partial^k \cdot x^n}{\partial x^k}.$$

Nehmen wir nun an, dass k nicht grösser als n ist; so ist nach §. 94.

$$\frac{\partial^k \cdot x}{\partial x^k} = \frac{\partial^k \cdot x^2}{\partial x^k} = \frac{\partial^k \cdot x^3}{\partial x^k} = \dots = \frac{\partial^k \cdot x^{k-1}}{\partial x^k} = 0,$$

und folglich

$$\frac{\partial^k y}{\partial x^k} = f^{(k)}(x)$$

$$= A_k \frac{\partial^k \cdot x^k}{\partial x^k} + A_{k+1} \frac{\partial^k \cdot x^{k+1}}{\partial x^k} + A_{k+2} \frac{\partial^k \cdot x^{k+2}}{\partial x^k} + \dots + A_n \frac{\partial^k \cdot x^n}{\partial x^k}.$$

Aber nach §. 94.

$$\frac{\partial^k \cdot x^k}{\partial x^k} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots k,$$

$$\frac{\partial^k \cdot x^{k+1}}{\partial x^k} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots (k+1) x,$$

$$\frac{\partial^k \cdot x^{k+2}}{\partial x^k} = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \dots (k+2) x^2,$$

u. s. w.

$$\frac{\partial^k \cdot x^n}{\partial x^k} = (n-k+1) (n-k+2) \dots n x^{n-k}.$$

Also

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k y}{\partial x^k} = f^{(k)}(x) = & 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot k A_k \\ & + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (k+1) A_{k+1} x \\ & + 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (k+2) A_{k+2} x^2 \\ & \dots \dots \dots \\ & + (n-k+1) (n-k+2) \dots n A_n x^{n-k}. \end{aligned}$$

Setzt man $x = 0$; so erhält man die merkwürdige Gleichung

$$f^{(k)}(0) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot k A_k$$

oder

$$A_k = \frac{f^{(k)}(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot k},$$

d. h. man erhält den Coefficienten der k ten Potenz von x in jeder ganzen rationalen algebraischen Function von x , wenn man in dem k ten Differentialquotienten dieser Function $x=0$ setzt, und den diesem Werthe von x entsprechenden Werth des in Rede stehenden Differentialquotienten durch $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k$ dividirt.

Bemerkt man nun noch, dass offenbar $A = f(0)$ ist; so erhält man den folgenden höchst merkwürdigen Ausdruck jeder ganzen rationalen algebraischen Function $y = f(x)$ des n ten Grades:

$$y = f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1} x + \frac{f''(0)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{f'''(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} x^n.$$

Auch ergibt sich aus dem Obigen, wenn man $k = n$ setzt, auf der Stelle

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = f^{(n)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n A_n,$$

so dass also der n te Differentialquotient jeder ganzen rationalen algebraischen Function des n ten Grades eine constante Grösse ist, und alle höhern Differentialquotienten einer solchen Function folglich verschwinden.

II. Man kann aus der vorher für $y = f(x)$ gefundenen allgemeinen Formel auch einen merkwürdigen Ausdruck für $f(x + \Delta x)$ herleiten.

Setzt man nämlich in der in Rede stehenden allgemeinen Formel $x + \Delta x$ für x , und entwickelt dann alle Potenzen von $x + \Delta x$ nach dem Binomischen Lehrsatz; so erhält man ohne Schwierigkeit

$$\begin{aligned}
 f(x + \Delta x) = & f(0) + \frac{f'(0)}{1} x + \frac{f''(0)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{f'''(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{1 \dots n} x^n \\
 & + \left\{ f'(0) + \frac{f''(0)}{1} x + \frac{f'''(0)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{1 \dots (n-1)} x^{n-1} \right\} \frac{\Delta x}{1} \\
 & + \left\{ f''(0) + \frac{f'''(0)}{1} x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{1 \dots (n-2)} x^{n-2} \right\} \frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} \\
 & \dots \dots \dots \\
 & + \left\{ f^{(n-1)}(0) + \frac{f^{(n)}(0)}{1} x \right\} \frac{\Delta x^{n-1}}{1 \dots (n-1)} \\
 & + f^{(n)}(0) \frac{\Delta x^n}{1 \dots n},
 \end{aligned}$$

woraus sich ferner nach dem in I. für $f(x)$ gefundenen allgemeinen Ausdrucke, wenn man denselben auch auf die Functionen $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $\dots$ anwendet, unmittelbar der folgende ebenfalls sehr merkwürdige Ausdruck ergibt:

$$\begin{aligned}
 f(x + \Delta x) = & f(x) + f'(x) \frac{\Delta x}{1} + f''(x) \frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} + f'''(x) \frac{\Delta x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \\
 & \dots + f^{(n-1)}(x) \frac{\Delta x^{n-1}}{1 \dots (n-1)} + f^{(n)}(x) \frac{\Delta x^n}{1 \dots n}.
 \end{aligned}$$

Dass $f^{(n)}(x) = f^{(n)}(0)$ ist, ist klar, weil $f^{(n)}(x)$ nach I. eine constante Grösse ist.

Zu bemerken ist noch, dass man den obigen Ausdruck auch unter der Form

$$y^{(1)} = y + \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{\partial^n y}{\partial x^n} \cdot \frac{\Delta x^n}{1 \dots n},$$

oder, weil bekanntlich $y^{(1)} - y = \Delta y$ ist, auch unter der Form

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{\partial^n y}{\partial x^n} \cdot \frac{\Delta x^n}{1 \dots n}$$

schreiben kann.

§. 96.

Für $y = a^x$, wo a eine positive Grösse bezeichnen soll, ist nach §. 57.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = a^x \log a.$$

Also ist

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} a^x \log a = a^x (\log a)^2,$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{\partial \cdot a^x}{\partial x} (la)^2 = a^x (la)^3,$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \frac{\partial \cdot a^x}{\partial x} (la)^3 = a^x (la)^4,$$

u. s. w.

Folglich ist allgemein

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = a^x (la)^n, \quad \partial^n y = a^x (la)^n \partial x^n.$$

Für $a = e$ ist $la = 1$, und folglich

$$\frac{\partial^n \cdot e^x}{\partial x^n} = e^x, \quad \partial^n \cdot e^x = e^x \partial x^n.$$

§. 97.

Für $y = \log x$, wo x positiv seyn soll, ist nach §. 59.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{xlb} = \frac{x^{-1}}{lb}.$$

Folglich ist nach §. 93. I.

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = \frac{1}{lb} \cdot \frac{\partial^{n-1} x^{-1}}{\partial x^{n-1}}.$$

Nach §. 94. ist aber

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{n-1} x^{-1}}{\partial x^{n-1}} &= -1. -2. -3 \dots - (n-1) \cdot x^{-n} \\ &= (-1)^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}{x^n}. \end{aligned}$$

Also ist

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}{x^n lb},$$

oder nach §. 58.

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \log e}{x^n},$$

und folglich

$$\partial^n y = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}{x^n lb} \partial x^n$$

oder

$$\partial^n y = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \log e}{x^n} \partial x^n.$$

Hieraus ergibt sich nun auch unmittelbar

$$\frac{\partial^n l x}{\partial x^n} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}{x^n},$$

$$\partial^n l x = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}{x^n} \partial x^n.$$

§. 98.

Mittelst §. 60. und §. 61. erhält man leicht:

$$\frac{\partial \sin x}{\partial x} = \cos x = \sin(x + \frac{1}{2}\pi),$$

$$\frac{\partial^2 \sin x}{\partial x^2} = -\sin x = \sin(x + \frac{2}{2}\pi),$$

$$\frac{\partial^3 \sin x}{\partial x^3} = -\cos x = \sin(x + \frac{3}{2}\pi),$$

$$\frac{\partial^4 \sin x}{\partial x^4} = \sin x = \sin(x + \frac{4}{2}\pi),$$

$$\frac{\partial^5 \sin x}{\partial x^5} = \cos x = \sin(x + \frac{5}{2}\pi),$$

$$\frac{\partial^6 \sin x}{\partial x^6} = -\sin x = \sin(x + \frac{6}{2}\pi),$$

$$\frac{\partial^7 \sin x}{\partial x^7} = -\cos x = \sin(x + \frac{7}{2}\pi),$$

u. s. w.

Also ist allgemein

$$1. \quad \frac{\partial^n \sin x}{\partial x^n} = \sin(x + \frac{1}{2}n\pi), \quad \partial^n \sin x = \sin(x + \frac{1}{2}n\pi) \partial x^n.$$

Auf ganz ähnliche Art ist nach §. 60. und §. 61.

$$\frac{\partial \cos x}{\partial x} = -\sin x = \cos(x + \frac{1}{2}\pi),$$

$$\frac{\partial^2 \cos x}{\partial x^2} = -\cos x = \cos(x + \frac{2}{2}\pi),$$

$$\frac{\partial^3 \cos x}{\partial x^3} = \sin x = \cos(x + \frac{3}{2}\pi),$$

$$\frac{\partial^4 \cos x}{\partial x^4} = \cos x = \cos(x + \frac{4}{2}\pi),$$

$$\frac{\partial^5 \cos x}{\partial x^5} = -\sin x = \cos(x + \frac{5}{2}\pi),$$

$$\frac{\partial^6 \cos x}{\partial x^6} = -\cos x = \cos(x + \frac{6}{2}\pi),$$

$$\frac{\partial^7 \cos x}{\partial x^7} = \sin x = \cos(x + \frac{7}{2}\pi),$$

u. s. w.

Folglich ist allgemein

$$2. \quad \frac{\partial^n \cos x}{\partial x^n} = \cos(x + \frac{1}{2}n\pi), \quad \partial^n \cos x = \cos(x + \frac{1}{2}n\pi) \partial x^n.$$

§. 99.

Für die Function

$$\varphi = \text{Arc tang } x$$

ist nach §. 70.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+\text{tang } \varphi^2} = \cos \varphi^2.$$

Differentiirt man nun diese Gleichung, bemerkt dabei aber, dass φ eine Function von x ist; so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= -2 \cos \varphi \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -2 \cos \varphi^3 \sin \varphi \\ &= -\cos \varphi^2 \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

Durch Differentiation dieser Gleichung ergibt sich ferner

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} &= -2 \cos \varphi^2 \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + 2 \cos \varphi \sin \varphi \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ &= -2 \cos \varphi^3 (\cos \varphi \cos 2\varphi - \sin \varphi \sin 2\varphi) \\ &= -2 \cos \varphi^3 \cos 3\varphi, \end{aligned}$$

und, wenn man diese Gleichung nun wieder differentiirt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} &= 2.3 \cos \varphi^3 \sin 3\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + 2.3 \cos \varphi^2 \sin \varphi \cos 3\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ &= 2.3 \cos \varphi^4 (\cos \varphi \sin 3\varphi + \sin \varphi \cos 3\varphi) \\ &= 2.3 \cos \varphi^4 \sin 4\varphi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^5 \varphi}{\partial x^5} &= 2.3.4 \cos \varphi^4 \cos 4\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - 2.3.4 \cos \varphi^3 \sin \varphi \sin 4\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ &= 2.3.4 \cos \varphi^5 (\cos \varphi \cos 4\varphi - \sin \varphi \sin 4\varphi) \\ &= 2.3.4 \cos \varphi^5 \cos 5\varphi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^6 \varphi}{\partial x^6} &= -2.3.4.5 \cos \varphi^5 \sin 5\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - 2.3.4.5 \cos \varphi^4 \sin \varphi \cos 5\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ &= -2.3.4.5 \cos \varphi^6 (\cos \varphi \sin 5\varphi + \sin \varphi \cos 5\varphi) \\ &= -2.3.4.5 \cos \varphi^6 \sin 6\varphi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^7 \varphi}{\partial x^7} &= -2.3.4.5.6 \cos \varphi^6 \cos 6\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + 2.3.4.5.6 \cos \varphi^5 \sin \varphi \sin 6\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ &= -2.3.4.5.6 \cos \varphi^7 (\cos \varphi \cos 6\varphi - \sin \varphi \sin 6\varphi) \\ &= -2.3.4.5.6 \cos \varphi^7 \cos 7\varphi, \end{aligned}$$

u. s. w.

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar.

Allgemein ist

$$\frac{\partial^{2n} \varphi}{\partial x^{2n}} = 1.2.3.4 \dots (2n-1) (-1)^n \cos \varphi^{2n} \sin 2n\varphi,$$

$$\frac{\partial^{2n+1} \varphi}{\partial x^{2n+1}} = 1.2.3.4 \dots 2n (-1)^n \cos \varphi^{2n+1} \cos (2n+1)\varphi.$$

Es ist aber

$$\begin{aligned}\sin 2n \left(\frac{1}{2}\pi - \varphi\right) &= \sin (n\pi - 2n\varphi) \\ &= -\cos n\pi \sin 2n\varphi = -(-1)^n \sin 2n\varphi, \\ \sin (2n+1) \left(\frac{1}{2}\pi - \varphi\right) &= \sin \{n\pi - (2n+1)\varphi + \frac{1}{2}\pi\} \\ &= \cos \{n\pi - (2n+1)\varphi\} = \cos n\pi \cos (2n+1)\varphi = (-1)^n \cos (2n+1)\varphi,\end{aligned}$$

oder

$$\sin 2n\varphi = -\frac{1}{(-1)^n} \sin 2n\left(\frac{1}{2}\pi - \varphi\right),$$

$$\cos (2n+1)\varphi = \frac{1}{(-1)^n} \sin (2n+1)\left(\frac{1}{2}\pi - \varphi\right).$$

Also ist

$$\frac{\partial^{2n}\varphi}{\partial x^{2n}} = -1.2.3\dots(2n-1) \cos \varphi^{2n} \sin 2n\left(\frac{1}{2}\pi - \varphi\right),$$

$$\frac{\partial^{2n+1}\varphi}{\partial x^{2n+1}} = 1.2.3\dots 2n \cos \varphi^{2n+1} \sin (2n+1)\left(\frac{1}{2}\pi - \varphi\right);$$

oder

$$\frac{\partial^{2n}\varphi}{\partial x^{2n}} = 1.2.3\dots(2n-1)(-1)^{2n-1} \cos \varphi^{2n} \sin 2n\left(\frac{1}{2}\pi - \varphi\right),$$

$$\frac{\partial^{2n+1}\varphi}{\partial x^{2n+1}} = 1.2.3\dots 2n(-1)^{2n} \cos \varphi^{2n+1} \sin (2n+1)\left(\frac{1}{2}\pi - \varphi\right),$$

und folglich offenbar überhaupt für jedes gerade oder ungerade n

$$\frac{\partial^n \text{Arc tang } x}{\partial x^n} = 1.2.3\dots(n-1)(-1)^{n-1} \cos \varphi^n \sin n\left(\frac{1}{2}\pi - \varphi\right),$$

für

$$\varphi = \text{Arc tang } x.$$

§. 100.

Weil nach §. 71.

$$\frac{\partial \text{Arc cot } x}{\partial x} = -\frac{1}{1+x^2}$$

ist; so ist

$$\frac{\partial \text{Arc cot } x}{\partial x} = -\frac{\partial \text{Arc tang } x}{\partial x},$$

und folglich offenbar überhaupt

$$\frac{\partial^n \text{Arc cot } x}{\partial x^n} = -\frac{\partial^n \text{Arc tang } x}{\partial x^n},$$

d. i. nach §. 99.

$$\frac{\partial^n \text{Arc cot } x}{\partial x^n} = 1.2.3\dots(n-1)(-1)^n \cos \varphi^n \sin n\left(\frac{1}{2}\pi - \varphi\right),$$

für

$$\varphi = \text{Arc tang } x.$$

Für $\psi = \text{Arc cot } x$ ist

$$x = \cot \psi = \tan(\tfrac{1}{2}\pi - \psi),$$

und man kann folglich offenbar $\tfrac{1}{2}\pi - \psi$ für φ , ψ für $\tfrac{1}{2}\pi - \varphi$ setzen. Auf diese Art erhält man aus dem Vorhergehenden

$$\frac{\partial^n \text{Arc cot } x}{\partial x^n} = 1.2.3 \dots (n-1) (-1)^n \sin \psi^n \sin n\psi.$$

Fünftes Kapitel.

Der Maclaurin'sche und Taylor'sche Lehrsatz für Functionen
mit einer veränderlichen Grösse.

§. 101.

Erklärung. Man sagt, dass eine Grösse X eine Mittelgrösse zwischen zwei andern Grössen A und B , oder zwischen diesen beiden Grössen enthalten sey, wenn das Product

$$(A-X)(X-B)$$

eine positive Grösse ist, wobei wir, wie auch im Folgenden immer geschehen wird, Null mit unter den positiven Grössen begreifen.

Bezeichnen wir also eine Mittelgrösse zwischen A und B überhaupt durch $M(A, B)$; so ist das Product

$$\{A - M(A, B)\} \{M(A, B) - B\}$$

jederzeit eine positive Grösse.

Zu näherer Erläuterung dieser allgemeinen Definition möge noch Folgendes bemerkt werden.

Ist zuerst das Product

$$\{A - M(A, B)\} \{M(A, B) - B\}$$

nicht Null; so verschwindet keiner seiner beiden Factoren, und diese beiden Factoren haben, weil das Product positiv ist, gleiche Vorzeichen. Daher ist mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$M(A, B) \geq A, \quad M(A, B) \leq B.$$

Verschwindet das Product

$$\{A - M(A, B)\} \{M(A, B) - B\};$$

so verschwindet entweder nur einer seiner beiden Factoren, oder diese Factoren verschwinden beide. Verschwindet nun zuerst bloss der Factor $A - M(A, B)$; so ist

$$M(A, B) = A, \quad M(A, B) \leq B.$$

Verschwindet dagegen bloss der Factor $M(A, B) - B$; so ist

$$M(A, B) \geq A, \quad M(A, B) = B.$$

Verschwinden endlich beide Factoren; so ist

$$M(A, B) = A, \quad M(A, B) = B,$$

und folglich natürlich $A = B$.

Hieraus sieht man, dass eine Mittelgrösse zwischen zwei ungleichen Grössen jederzeit eine Grösse ist, welche nicht kleiner als die kleinste und nicht grösser als die grösste der beiden in Rede stehenden Grössen ist. Eine Mittelgrösse zwischen zwei einander gleichen Grössen ist dagegen diesen beiden Grössen immer selbst gleich.

§. 102.

Lehrsatz. Wenn die Function $y = f(x)$ in der Nähe eines bestimmten Werthes der unabhängigen veränderlichen Grösse, der jedoch hier der Einfachheit wegen durch x selbst bezeichnet werden mag, stetig, und der entsprechende Werth $f'(x)$ des ersten Differentialquotienten dieser Function eine endliche bestimmte Grösse, aber nicht $= 0$ ist; so wird, indem man die unabhängige veränderliche Grösse sich von dem bestimmten Werthe x an stetig verändern lässt,

I. wenn $f'(x)$ positiv ist, die gegebene Function von $f(x)$ an zu- oder abnehmen, wenn die unabhängige veränderliche Grösse von x an respective zu- oder abnimmt; dagegen wird

II. wenn $f'(x)$ negativ ist, die gegebene Function von $f(x)$ an zu- oder abnehmen, wenn die unabhängige veränderliche Grösse von x an respective ab- oder zunimmt.

Beweis. Die der beliebigen Aenderung Δx von x entsprechende Aenderung von $f(x)$ sey Δy . Nach dem allgemeinen Begriffe des Differentialquotienten ist $f'(x)$ die Gränze, welcher $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sich immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade nähert, wenn Δx sich der Null nähert. Für der Null unendlich nahe kommende Δx hat also $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ mit $f'(x)$ offenbar einerlei Vorzeichen. Ist folglich $f'(x)$ positiv; so ist, immer für der Null unendlich nahe kommende Δx , auch $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ positiv, und Δx und Δy haben folglich gleiche Vorzeichen, d. h. x und $f(x)$ nehmen gleichzeitig zu und ab, wie behauptet wurde. Ist dagegen $f'(x)$ negativ; so ist für der Null unendlich nahe kommende Δx auch $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ negativ, und Δx und Δy haben folglich entgegengesetzte

Vorzeichen, d. i. $f(x)$ nimmt ab oder zu, wenn x respective zu - oder abnimmt, welches der zweite Theil der Behauptung war.

§. 103.

Wenn eine von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ stetige Function zwischen diesen Gränzen ihr Zeichen niemals ändert; so kann dieselbe zwischen diesen Gränzen auch niemals verschwinden, weil eine für einen gewissen Werth ihrer veränderlichen Grösse verschwindende, in der Nähe dieses Werths stetige, Function bei diesem Werthe der unabhängigen veränderlichen Grösse offenbar jederzeit entweder vom Negativen zum Positiven, oder vom Positiven zum Negativen übergehen muss.

Dies vorausgesetzt, lassen sich aus dem im vorigen Paragraphen bewiesenen Satze unmittelbar die folgenden wichtigen Folgerungen ziehen.

I. Wenn $\beta > \alpha$ und die Function $f(x)$ sowohl, als auch ihr erster Differentialquotient $f'(x)$ von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ stetig ist; so wird, wenn $f'(x)$ von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ stets positiv ist, die Function $f(x)$ von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ stets wachsen; dagegen wird, wenn $f'(x)$ von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ stets negativ ist, die Function $f(x)$ von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ stets abnehmen.

II. Wenn $\beta < \alpha$ und die Function $f(x)$ sowohl, als auch ihr erster Differentialquotient $f'(x)$ von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ stetig ist; so wird, wenn $f'(x)$ von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ stets positiv ist, die Function $f(x)$ von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ stets abnehmen; dagegen wird, wenn $f'(x)$ von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ stets negativ ist, die Function $f(x)$ von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ stets wachsen.

III. Wie also auch die Gränzen α und β beschaffen seyn mögen; so wird, wenn die Function $f(x)$ sowohl, als auch ihr erster Differentialquotient von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ stetig ist, und letzterer von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ sein Zeichen niemals ändert, die Function $f(x)$ immer von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ entweder stets wachsen, oder stets abnehmen.

Auch ergiebt sich aus I. und II. unmittelbar, dass, wenn die Function $f(x)$ von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ stets zu - oder stets abnimmt, eine andere Function $\varphi(x)$ dagegen von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ respective stets ab - oder stets zunimmt, die Differentialquotienten $f'(x)$ und $\varphi'(x)$ von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ immer einander entgegengesetzte, sich selbst aber immer gleich bleibende Vorzeichen haben werden. Stetigkeit der Functionen und ihrer ersten Differentialquotienten wird natürlich auch hierbei immer vorausgesetzt.

§. 104.

Lehrsatz. Seien $f(x)$ und $F(x)$ zwei Functionen, welche für $x = \alpha$ beide verschwinden und, so wie

ihre ersten Differentialquotienten $f'(x)$ und $F'(x)$ von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ stetig sind. Ändert nun $F'(x)$ von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ sein Zeichen nicht; so ist, wenn A und B den kleinsten und grössten unter allen den Werthen bezeichnen, welche der Bruch

$$\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

erhält, wenn man x sich von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ stetig verändern lässt, der Bruch

$$\frac{f(\beta)}{F(\beta)}$$

jederzeit eine Mittelgrösse zwischen A und B , d. i. in der oben eingeführten Bezeichnung

$$\frac{f(\beta)}{F(\beta)} = M(A, B).$$

Beweis. Man lasse i eine unendlich kleine positive Grösse, die jedoch nicht $= 0$ ist, bezeichnen, und setze, indem sich die obern Zeichen auf den Fall, wo $\alpha < \beta$, die untern auf den Fall, wo $\alpha > \beta$ ist, beziehen,

$$\alpha \pm i = \alpha', \beta \mp i = \beta'.$$

Der kleinste und grösste unter allen den Werthen, welche der Bruch

$$\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

erhält, wenn man x sich von $x = \alpha'$ bis $x = \beta'$ stetig verändern lässt, seyen respective A' und B' . Setzen wir nun, indem i seine obige Bedeutung behält,

$$A' - i = A'', \quad B' + i = B'';$$

so ist offenbar für jeden Werth von x von $x = \alpha'$ bis $x = \beta'$

$$\frac{f'(x)}{F'(x)} - A'' > 0, \quad \frac{f'(x)}{F'(x)} - B'' < 0.$$

Nach der Voraussetzung ändert $F'(x)$ von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ sein Zeichen nicht. Also ist $F'(x)$ von $x = \alpha'$ bis $x = \beta'$ offenbar entweder stets > 0 oder stets < 0 , und es ist folglich von $x = \alpha'$ bis $x = \beta'$ jederzeit das eine der beiden Producte

$$F'(x) \left\{ \frac{f'(x)}{F'(x)} - A'' \right\}, \quad F'(x) \left\{ \frac{f'(x)}{F'(x)} - B'' \right\}$$

stets > 0 , das andere stets < 0 , wobei es übrigens unbestimmt bleibt, für welches dieser beiden Producte das Erste, und für welches das Zweite Statt findet. Daher ist von $x = \alpha'$ bis $x = \beta'$ jederzeit die eine der beiden Grössen

$$f'(x) - A''F'(x), \quad f'(x) - B''F'(x)$$

stets > 0 , die andere stets < 0 . Da nun diese beiden Grössen offenbar respective die Differentialquotienten der Functionen

$$f(x) - A''F(x), \quad f(x) - B''F(x)$$

sind; so ergibt sich aus §. 103. unmittelbar, dass jederzeit von $x = \alpha'$ bis $x = \beta'$ die eine dieser beiden Functionen stets wachsen, die andere dagegen stets abnehmen wird. Nach der Voraussetzung ist nun $f(\alpha) = 0$, $F(\alpha) = 0$, und folglich auch

$$f(\alpha) - A''F(\alpha) = 0, \quad f(\alpha) - B''F(\alpha) = 0.$$

Die Grösse i kann man beliebig klein, also α' beliebig nahe bei α , die Grössen

$$f(\alpha') - A''F(\alpha'), \quad f(\alpha') - B''F(\alpha')$$

folglich wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der Functionen beliebig nahe bei Null annehmen. Hieraus, in Verbindung mit dem vorher Bewiesenen, geht unzweideutig hervor, dass von den beiden Grössen

$$f(\beta') - A''F(\beta'), \quad f(\beta') - B''F(\beta')$$

jederzeit die eine > 0 , die andere < 0 ist. Also ist auch jederzeit die eine der beiden Grössen

$$\frac{f(\beta')}{F(\beta')} - A'', \quad \frac{f(\beta')}{F(\beta')} - B''$$

> 0 , die andere < 0 . Weil aber wegen der gemachten Voraussetzungen $A'' < B''$ ist; so ist offenbar

$$\frac{f(\beta')}{F(\beta')} - A'' > 0, \quad \frac{f(\beta')}{F(\beta')} - B'' < 0,$$

oder

$$\frac{f(\beta')}{F(\beta')} > A'', \quad \frac{f(\beta')}{F(\beta')} < B''.$$

Nach dem Obigen ist nun

$$A' - i = A'', \quad B' + i = B'',$$

wo die positive Grösse i beliebig klein angenommen werden kann. Sind also die Grössen A' und B' ungleich, d. i. um eine bestimmte endliche Grösse von einander verschieden; so ist offenbar auch

$$\frac{f(\beta')}{F(\beta')} > A', \quad \frac{f(\beta')}{F(\beta')} < B'.$$

Wäre aber $A' = B'$; so könnte zwischen $A'' = A' - i$ und $B'' = B' + i$ offenbar bloss $A' = B'$ liegen, und es wäre folglich augenscheinlich in diesem Falle

$$A' = \frac{f(\beta')}{F(\beta')} = B'.$$

Da A' der kleinste, B' der grösste unter allen den Werthen ist, welche der Bruch

$$\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

erhält, wenn man sich x von $x = \alpha'$ bis $x = \beta'$ stetig verändern lässt; so muss in dem Falle, wo $A' = B'$ ist, dieser Bruch offenbar so beschaffen seyn, dass er seinen Werth von $x = \alpha'$ bis $x = \beta'$ gar nicht ändert. Ob es solche Functionen geben kann, lassen wir dahin gestellt seyn; der Allgemeinheit des Beweises wegen musste der in Rede stehende Fall vorher mit betrachtet werden.

Ueberhaupt geht nun aber aus dem Obigen hervor, dass das Product

$$\left\{ A' - \frac{f(\beta')}{F(\beta')} \right\} \left\{ \frac{f(\beta')}{F(\beta')} - B' \right\}$$

jederzeit eine positive Grösse, und folglich nach §. 101. der Bruch

$$\frac{f(\beta')}{F(\beta')}$$

jederzeit eine Mittelgrösse zwischen A' und B' , oder

$$\frac{f(\beta')}{F(\beta')} = M(A', B')$$

ist.

Die Grösse i ist eine unendlich kleine Grösse, und nach den gemachten Voraussetzungen sind die Functionen $f(x)$, $F(x)$, $f'(x)$, $F'(x)$ von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ stetig. Daher kann man statt der Grössen α' , β' , A' , B' offenbar auch respective α , β , A , B setzen, so dass folglich auch

$$\frac{f(\beta)}{F(\beta)} = M(A, B)$$

ist, wie bewiesen werden sollte.

Besonders bemerken wir des Folgenden wegen hier noch, dass in dem Falle, wo A und B ungleich sind, jederzeit

$$A < \frac{f(\beta)}{F(\beta)} < B,$$

in dem Falle dagegen, wo $A = B$ ist,

$$A = \frac{f(\beta)}{F(\beta)} = B$$

ist. Auch ergiebt sich aus dem Vorhergehenden, dass im letztern Falle die Function

$$\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ ihren Werth gar nicht ändert, und jedem dieser Werthe dieser Function die Grösse

$$\frac{f(\beta)}{F(\beta)}$$

gleich ist.

§. 105.

Zusatz. I. Indem alle dem vorigen Satze zum Grunde liegenden Voraussetzungen völlig ungeändert bleiben, denke man sich jetzt die Function

$$\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

in dem Intervalle $x = \alpha$, $x = \beta$ durch eine stetige Curve dargestellt; so erhellet mittelst des vorigen Satzes auf der Stelle, dass es immer einen gewissen Werth ξ von x geben muss, welcher grösser als die kleinere, kleiner als die grössere der beiden Grössen α und β , und für welchen

$$\frac{f(\beta)}{F(\beta)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

ist.

II. Setzt man nun, indem jetzt i eine beliebig grosse positive oder negative Grösse bezeichnet, $\beta = \alpha + i$; so ist offenbar $\xi = \alpha + i_1$, wo i_1 eine Grösse bezeichnet, welche mit i gleiches Vorzeichen, aber einen kleinern absoluten Werth wie i hat, und folglich

$$\frac{f(\alpha + i)}{F(\alpha + i)} = \frac{f'(\alpha + i_1)}{F'(\alpha + i_1)},$$

indem auch hierbei die bei dem Lehrsatz in §. 104. gemachten Voraussetzungen stets zum Grunde liegen.

Dies führt uns nun unmittelbar zu dem folgenden sehr wichtigen Satze:

Wenn $f(x)$ und $F(x)$ zwei für $x = \alpha$ verschwindende Functionen bezeichnen, welche, so wie ihre ersten Differentialquotienten $f'(x)$ und $F'(x)$, von $x = \alpha$ bis $x = \alpha + i$, wo i eine beliebige positive oder negative Grösse bezeichnet, stetig sind, auch der Differentialquotient $F'(x)$ von $x = \alpha$ bis $x = \alpha + i$ sein Zeichen nicht ändert; so ist, indem i_1 eine Grösse bezeichnet, welche mit i einerlei Vorzeichen, aber einen kleinern absoluten Werthe wie i hat, jederzeit

$$\frac{f(\alpha + i)}{F(\alpha + i)} = \frac{f'(\alpha + i_1)}{F'(\alpha + i_1)}.$$

§. 106.

Lehrsatz. Wenn die Functionen

$$f(x), f'(x), f''(x), f'''(x), \dots, f^{(n-1)}(x);$$

$$F(x), F'(x), F''(x), F'''(x), \dots, F^{(n-1)}(x)$$

für $x = \alpha$ sämmtlich verschwinden, und, so wie auch die Functionen $f^{(n)}(x)$ und $F^{(n)}(x)$, von $x = \alpha$ bis $x = \alpha + i$ stetig sind, keine der Functionen

$$F'(x), F''(x), F'''(x), F^{(4)}(x), \dots, F^{(n)}(x)$$

aber von $x = \alpha$ bis $x = \alpha + i$ ihr Zeichen ändert; so ist jederzeit

$$\frac{f(\alpha + i)}{F(\alpha + i)} = \frac{f^{(n)}(\alpha + i_n)}{F^{(n)}(\alpha + i_n)},$$

wo i_n eine Grösse bezeichnet, welche mit i gleiches Vorzeichen, aber einen kleinern absoluten Werth wie i hat.

Beweis. Nach §. 105. II. ist

$$\frac{f(\alpha + i)}{F(\alpha + i)} = \frac{f'(\alpha + i_1)}{F'(\alpha + i_1)},$$

$$\frac{f'(\alpha + i_1)}{F'(\alpha + i_1)} = \frac{f''(\alpha + i_2)}{F''(\alpha + i_2)},$$

$$\frac{f''(\alpha + i_2)}{F''(\alpha + i_2)} = \frac{f'''(\alpha + i_3)}{F'''(\alpha + i_3)},$$

...

$$\frac{f^{(n-1)}(\alpha + i_{n-1})}{F^{(n-1)}(\alpha + i_{n-1})} = \frac{f^{(n)}(\alpha + i_n)}{F^{(n)}(\alpha + i_n)},$$

wo die Grössen $i, i_1, i_2, i_3, \dots, i_n$ sämmtlich einerlei Vorzeichen haben, ihre absoluten Werthe aber eine fortwährend abnehmende Reihe bilden. Also ist offenbar auch

$$\frac{f(\alpha + i)}{F(\alpha + i)} = \frac{f^{(n)}(\alpha + i_n)}{F^{(n)}(\alpha + i_n)},$$

wo i und i_n Grössen von einerlei Vorzeichen sind, und der absolute Werth von i_n kleiner wie der absolute Werth von i ist, welches der zu beweisende Satz war.

§. 107.

Zusatz. Weil i_n mit i einerlei Vorzeichen, und einen kleinern absoluten Werth wie i hat; so kann man offenbar $i_n = \varrho i$ setzen, wo ϱ einen positiven echten Bruch bezeichnet, und der vorige Lehrsatz lässt sich also auch auf folgende Art ausdrücken:

Wenn die Functionen

$$f(x), f'(x), f''(x), f'''(x), \dots, f^{(n-1)}(x);$$

$$F(x), F'(x), F''(x), F'''(x), \dots, F^{(n-1)}(x)$$

für $x = \alpha$ sämmtlich verschwinden, und, so wie auch die Functionen $f^{(n)}(x)$ und $F^{(n)}(x)$, von $x = \alpha$ bis $x = \alpha + i$ stetig sind, keine der Functionen

$$F'(x), F''(x), F'''(x), F^{(4)}(x), \dots, F^{(n)}(x)$$

aber von $x = \alpha$ bis $x = \alpha + i$ ihr Zeichen ändert; so ist, indem ϱ einen positiven echten Bruch bezeichnet, jederzeit

$$\frac{f(\alpha + i)}{F(\alpha + i)} = \frac{f^{(n)}(\alpha + \varrho i)}{F^{(n)}(\alpha + \varrho i)}.$$

§. 108.

Wir wollen nun $\alpha = 0$, $F(x) = x^n$, wo n eine positive ganze Zahl bezeichnen soll, setzen, und wollen untersuchen, ob die Function $F(x) = x^n$ allen bei dem vorhergehenden Satze gemachten Voraussetzungen genügt.

Entwickeln wir zu dem Ende die Differentialquotienten der Function $F(x) = x^n$; so erhalten wir

$$\begin{aligned} F(x) &= x^n, \\ F'(x) &= nx^{n-1}, \\ F''(x) &= (n-1)nx^{n-2}, \\ F'''(x) &= (n-2)(n-1)nx^{n-3}, \\ &\dots\dots\dots \\ F^{(n-1)}(x) &= 2.3.4.5.6\dots nx, \\ F^{(n)}(x) &= 1.2.3.4.5.6\dots n. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich, dass

$$F(x), F'(x), F''(x), F'''(x), \dots F^{(n-1)}(x)$$

für $x = 0$ sämmtlich verschwinden, und dass keine der Functionen

$$F'(x), F''(x), F'''(x), F^{(4)}(x), \dots F^{(n)}(x)$$

von $x = 0$ bis $x = i$ ihr Zeichen ändert. Auch sind die Functionen

$$F(x), F'(x), F''(x), F'''(x), \dots F^{(n)}(x)$$

offenbar von $x = 0$ bis $x = i$ stetig, wie sogleich in die Augen fällt, wenn man nur festhält, dass n eine positive ganze Zahl ist. Also genügt die Function $F(x)$ offenbar den sämmtlichen im vorhergehenden Paragraphen geforderten Bedingungen. Weil nun

$$F^{(n)}(x) = 1.2.3\dots n$$

ist; so ist natürlich auch

$$F^{(n)}(qi) = 1.2.3\dots n$$

zu setzen, und aus §. 107. ergibt sich daher unmittelbar der folgende Satz:

I. Wenn die Functionen

$$f(x), f'(x), f''(x), f'''(x), \dots f^{(n-1)}(x)$$

für $x = 0$ sämmtlich verschwinden, und, so wie die Function $f^{(n)}(x)$, von $x = 0$ bis $x = i$ stetig sind; so ist immer

$$f(i) = \frac{i^n}{1.2.3\dots n} f^{(n)}(qi),$$

wo q einen positiven echten Bruch bezeichnet.

Setzt man, welches offenbar verstattet ist, x für i ; so erhält man folgenden Satz:

II. Wenn die Functionen

$$f(x), f'(x), f''(x), f'''(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$$

für $x = 0$ sämmtlich verschwinden, und, so wie die Function $f^{(n)}(x)$, von $x = 0$ bis $x = x$ stetig sind; so ist immer

$$f(x) = \frac{x^n}{1.2.3\dots n} f^{(n)}(\rho x),$$

wo ρ einen positiven echten Bruch bezeichnet.

§. 109.

Wir wollen nun annehmen, dass die Functionen

$$\varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \varphi'''(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)$$

von $x = 0$ bis $x = x$ sämmtlich stetig sind. Setzen wir dann

$$f(x) = \varphi(x) - \varphi(0) - \frac{x}{1} \varphi'(0) - \frac{x^2}{1.2} \varphi''(0) - \dots - \frac{x^{n-1}}{1\dots(n-1)} \varphi^{(n-1)}(0);$$

so ergibt sich durch successive Differentiation ohne alle Schwierigkeit:

$$f(x) = \varphi(x) - \varphi(0) - \frac{x}{1} \varphi'(0) - \frac{x^2}{1.2} \varphi''(0) - \frac{x^3}{1.2.3} \varphi'''(0) - \dots - \frac{x^{n-1}}{1\dots(n-1)} \varphi^{(n-1)}(0),$$

$$f'(x) = \varphi'(x) - \varphi'(0) - \frac{x}{1} \varphi''(0) - \frac{x^2}{1.2} \varphi'''(0) - \dots - \frac{x^{n-2}}{1\dots(n-2)} \varphi^{(n-1)}(0),$$

$$f''(x) = \varphi''(x) - \varphi''(0) - \frac{x}{1} \varphi'''(0) - \dots - \frac{x^{n-3}}{1\dots(n-3)} \varphi^{(n-1)}(0),$$

$$f'''(x) = \varphi'''(x) - \varphi'''(0) - \dots - \frac{x^{n-4}}{1\dots(n-4)} \varphi^{(n-1)}(0),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$f^{(n-1)}(x) = \varphi^{(n-1)}(x) - \varphi^{(n-1)}(0),$$

$$f^{(n)}(x) = \varphi^{(n)}(x).$$

Hieraus ergibt sich auf der Stelle, dass die Functionen

$$f(x), f'(x), f''(x), f'''(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$$

für $x = 0$ sämmtlich verschwinden. Auch ist, weil nach der Voraussetzung

$$\varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \varphi'''(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)$$

von $x = 0$ bis $x = x$ stetig sind, klar, dass die Functionen

$$f(x), f'(x), f''(x), f'''(x), \dots, f^{(n)}(x)$$

von $x = 0$ bis $x = x$ stetig sind. Weil ferner

$$f^{(n)}(x) = \varphi^{(n)}(x)$$

ist; so ist natürlich auch

$$f^{(n)}(\rho x) = \varphi^{(n)}(\rho x),$$

und folglich nach §. 108.

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \frac{x}{1} \varphi'(0) + \frac{x^2}{1.2} \varphi''(0) + \frac{x^3}{1.2.3} \varphi'''(0) + \dots + \frac{x^{n-1}}{1 \dots (n-1)} \varphi^{(n-1)}(0) \\ = \frac{x^n}{1.2.3 \dots n} \varphi^{(n)}(\varrho x),$$

oder

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \frac{x}{1} \varphi'(0) + \frac{x^2}{1.2} \varphi''(0) + \frac{x^3}{1.2.3} \varphi'''(0) + \dots \\ \dots + \frac{x^{n-1}}{1 \dots (n-1)} \varphi^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{1 \dots n} \varphi^{(n)}(\varrho x).$$

Schreibt man nun statt des Functionszeichens φ wieder das Functionszeichen f ; so erhält man den folgenden höchst wichtigen und merkwürdigen Satz:

Wenn die Functionen

$$f(x), f'(x), f''(x), f'''(x), \dots, f^{(n)}(x)$$

von $x = 0$ bis $x = x$ sämmtlich stetig sind; so ist immer

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3} f'''(0) + \dots \\ \dots + \frac{x^{n-1}}{1 \dots (n-1)} f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{1 \dots n} f^{(n)}(\varrho x),$$

wo ϱ einen positiven echten Bruch bezeichnet.

§. 110.

Aus diesem Satze lassen sich zwei andere nicht minder wichtige Sätze herleiten.

Man setze $x = a + z$ und $f(x) = F(z)$; so ist, weil

$$\frac{\partial x}{\partial z} = 1$$

ist, nach §. 43.

$$F(z) = f(x),$$

$$F'(z) = f'(x) \frac{\partial x}{\partial z} = f'(x),$$

$$F''(z) = f''(x) \frac{\partial x}{\partial z} = f''(x),$$

$$F'''(z) = f'''(x) \frac{\partial x}{\partial z} = f'''(x),$$

u. s. w.;

also überhaupt

$$F^{(k)}(z) = f^{(k)}(x).$$

Für $z = 0$ ist $x = a$. Also ist

$$F^{(k)}(0) = f^{(k)}(a).$$

Setzt man ϱx für z ; so muss man offenbar

$$a + \varrho z = a + \varrho(x - a)$$

für x setzen, und hat also allgemein

$$F^{(k)}(\varrho z) = f^{(k)}(a + \varrho(x - a)).$$

Sind nun die Functionen

$$F(z), F'(z), F''(z), F'''(z), \dots, F^{(n)}(z)$$

von $z = 0$ bis $z = x$ sämmtlich stetig; so ist nach §. 109.

$$F(z) = F(0) + \frac{z}{1} F'(0) + \frac{z^2}{1.2} F''(0) + \frac{z^3}{1.2.3} F'''(0) + \dots$$

$$\dots + \frac{z^{n-1}}{1 \dots (n-1)} F^{(n-1)}(0) + \frac{z^n}{1 \dots n} F^{(n)}(\varrho z),$$

und man erhält also, wenn man alles Vorhergehende zusammen nimmt, den folgenden Satz:

I. Wenn die Functionen

$$f(x), f'(x), f''(x), f'''(x), \dots, f^{(n)}(x)$$

von $x = a$ bis $x = x$ sämmtlich stetig sind; so ist jederzeit

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2} f''(a) + \dots$$

$$\dots + \frac{(x-a)^{n-1}}{1 \dots (n-1)} f^{(n-1)}(a) + \frac{(x-a)^n}{1 \dots n} f^{(n)}(a + \varrho(x-a)),$$

wo ϱ einen positiven echten Bruch bezeichnet.

Setzt man hierin $x - a = i$, $x = a + i$; so ist, unter der Voraussetzung, dass die Functionen

$$f(x), f'(x), f''(x), f'''(x), \dots, f^{(n)}(x)$$

von $x = a$ bis $x = a + i$ sämmtlich stetig sind, jederzeit

$$f(a + i) = f(a) + \frac{i}{1} f'(a) + \frac{i^2}{1.2} f''(a) + \dots$$

$$\dots + \frac{i^{n-1}}{1 \dots (n-1)} f^{(n-1)}(a) + \frac{i^n}{1 \dots n} f^{(n)}(a + \varrho i),$$

wo ϱ einen positiven echten Bruch bezeichnet, und man hat also jetzt, wenn man nur wieder x für a schreibt, den folgenden ebenfalls höchst wichtigen Satz:

II. Wenn die Functionen

$$f(x), f'(x), f''(x), f'''(x), \dots, f^{(n)}(x)$$

von $x = x$ bis $x = x + i$ sämmtlich stetig sind; so ist immer

$$f(x + i) = f(x) + \frac{i}{1} f'(x) + \frac{i^2}{1.2} f''(x) + \frac{i^3}{1.2.3} f'''(x) + \dots$$

$$\dots + \frac{i^{n-1}}{1 \dots (n-1)} f^{(n-1)}(x) + \frac{i^n}{1 \dots n} f^{(n)}(x + \varrho i),$$

wo ϱ einen positiven echten Bruch bezeichnet.

§. 111.

Erklärung. Man bezeichne, wenn

$$t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, \dots, t_n, \dots$$

eine beliebige Reihe ist, die Summe

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \dots + t_n$$

der n ersten Glieder derselben durch s_n . Wenn nun s_n sich, wenn n wächst, einer bestimmten endlichen Grösse, die wir durch s bezeichnen wollen, immer mehr und mehr nähert, und derselben beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur n gross genug nimmt; so sagt man, dass die Reihe

$$t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, \dots, t_n, \dots$$

convergire oder convergent sey, und die Grösse s heisst dann die Summe derselben, ein Verhalten, welches man gewöhnlich auf ganz zweckmässige Weise durch

$$s = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \dots + t_n + \dots,$$

oder auch, wenn das Gesetz, nach welchem die Glieder der Reihe fortschreiten, schon aus einigen ihrer ersten Glieder deutlich genug erhellet, mit Weglassung des allgemeinen Gliedes t_n bloss durch

$$s = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + \dots$$

bezeichnet.

Dass convergirende Reihen zur annähernden Berechnung der numerischen Werthe ihrer Summen gebraucht werden können, und überhaupt bei der Berechnung der numerischen Werthe der Functionen gewöhnlich vortreffliche Dienste leisten, ergiebt sich aus dem vorhergehenden allgemeinen Begriffe von selbst. Da nämlich s_n , wenn n wächst, der Grösse s sich immer mehr und mehr nähert, und derselben beliebig nahe kommen kann, wenn man nur n gross genug nimmt; so wird man natürlich den Werth von s desto genauer erhalten, je mehr Glieder der Reihe

$$t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, \dots, t_n, \dots$$

vom Anfange an man mit einander vereinigt, und wird auch jederzeit s mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit erhalten können, wenn man nur eine hinreichende Anzahl von Gliedern der in Rede stehenden Reihe vom Anfange an mit einander vereinigt.

Wenn die oben durch s_n bezeichnete Grösse sich, wenn n wächst, nicht immer mehr und mehr bis zu jedem beliebigen Grade einer gewissen bestimmten endlichen Grösse nähert; so sagt man, dass die Reihe

$$t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, \dots, t_n, \dots$$

divergire oder divergent sey. Von einer Summe einer divergenten Reihe kann gar nicht die Rede seyn.

§. 112.

Eine Gleichung von der Form

$$s = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + \dots$$

setzt immer voraus, dass die Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens convergirt. Wenn die Glieder derselben sämtlich Functionen einer gewissen veränderlichen Grösse, z. B. von x sind; so tritt oft der Fall ein, dass die Convergenz nicht für alle, sondern nur für gewisse Werthe von x Statt findet, wo denn natürlich auch nur für diese Werthe von x die obige Gleichung richtig ist oder bestehen kann. In solchen Fällen wollen wir uns künftig der Kürze wegen der folgenden Bezeichnungen bedienen.

Wenn die obige Gleichung für jedes x gilt, welches grösser als a und kleiner als b ist; so soll dies auf folgende Art bezeichnet werden:

$$s = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + \dots$$

$$\{a < x < b\}$$

Gilt die obige Gleichung dagegen für jedes x , welches grösser als a und kleiner als b ist, und ausserdem auch noch für $x = a$; so soll dies durch

$$s = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + \dots$$

$$\{a = x < b\}$$

bezeichnet werden.

Gilt die obige Gleichung für jedes x , welches grösser als a und kleiner als b ist, und ausserdem auch noch für $x = b$; so soll dies durch

$$s = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + \dots$$

$$\{a < x = b\}$$

bezeichnet werden.

Gilt die obige Gleichung für jedes x , welches grösser als a und kleiner als b ist, und ausserdem auch noch für $x = a$ und $x = b$ selbst; so soll dies durch

$$s = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + \dots$$

$$\{a = x = b\}$$

bezeichnet werden.

Gilt die obige Gleichung für jedes x ; so wird gar nichts unter derselben bemerkt.

§. 113.

Aus §. 109., §. 110. und §. 111. ergeben sich nun unmittelbar die beiden folgenden höchst wichtigen Sätze, wobei q immer einen positiven echten Bruch bezeichnet.

I. Wenn die Function $f(x)$ nebst ihren sämtlichen Differentialquotienten von $x = 0$ bis $x = x$ stetig ist, und die Grösse

$$\frac{x^n}{1 \dots n} f^{(n)}(\varrho x)$$

sich, wenn n wächst, der Null immer mehr und mehr nähert, und derselben beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur n gross genug nimmt; so ist immer

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3} f'''(0) + \dots$$

II. Wenn die Function $f(x)$ nebst ihren sämtlichen Differentialquotienten von $x = x$ bis $x = x + i$ stetig ist, und die Grösse

$$\frac{i^n}{1 \dots n} f^{(n)}(x + \varrho i)$$

sich, wenn n wächst, der Null immer mehr und mehr nähert, und derselben beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur n gross genug nimmt; so ist immer

$$f(x+i) = f(x) + \frac{i}{1} f'(x) + \frac{i^2}{1.2} f''(x) + \frac{i^3}{1.2.3} f'''(x) + \dots$$

Der erste dieser beiden höchst wichtigen Sätze heisst das Maclaurin'sche Theorem, der zweite heisst das Taylor'sche Theorem für Functionen einer veränderlichen Grösse. Beide Sätze sind nach ihren berühmten Erfindern, den Britten Maclaurin und Brook Taylor, benannt.

§. 114.

Lehrsatz. Der Bruch

$$\frac{x^n}{1.2.3 \dots n}$$

nähert sich, was auch x seyn mag, wenn man n von einem bestimmten Werthe an wachsen lässt, der Null fortwährend immer mehr und mehr, und kann derselben auch beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur n gross genug nimmt.

Beweis. 1. Wir wollen zunächst x immer als positiv annehmen. Ist dann

$$n > x - 1, \quad n + 1 > x;$$

so ist

$$\frac{x}{n+1} < 1$$

und folglich

$$\frac{x^n}{1.2.3\dots n} \cdot \frac{x}{n+1} < \frac{x^{n+1}}{1.2.3\dots n},$$

d. i.

$$\frac{x^{n+1}}{1.2.3\dots (n+1)} < \frac{x^n}{1.2.3\dots n}.$$

Hieraus sieht man, dass, wenn man n von einer $x - 1$ übersteigenden Grösse an wachsen lässt, der Bruch

$$\frac{x^n}{1.2.3\dots n}$$

sich fortwährend immer mehr und mehr der Null nähert.

2. Sey nun, indem m und n immer positive ganze Zahlen bezeichnen, $m < n$ und $m > 1$; so ist offenbar

$$m(m-1) < n(m-1).$$

Also ist, wenn man auf beiden Seiten die Producte entwickelt,

$$m^2 - m < mn - n,$$

und folglich

$$m^2 + n < mn + m,$$

also auch

$$n < mn - m^2 + m,$$

d. i.

$$n < m(n - m + 1).$$

3. Ist nun zuerst $n = 2\mu$, d. i. n eine gerade Zahl, und $\mu > 1$; so kann man im Vorhergehenden

$$m = 2, 3, 4, 5, \dots, \mu$$

setzen, und erhält also

$$2\mu = 1.2\mu,$$

$$2\mu < 2.(2\mu - 1),$$

$$2\mu < 3.(2\mu - 2),$$

$$2\mu < 4.(2\mu - 3),$$

$$\vdots$$

$$2\mu < (\mu - 1)(\mu + 2),$$

$$2\mu < \mu(\mu + 1).$$

Folglich ist, wenn man auf beiden Seiten multiplicirt,

$$(2\mu)^\mu < 1.2.3.4\dots 2\mu,$$

für jedes μ , welches grösser als die Einheit ist. Also wird für jedes gerade n , welches > 2 ist,

$$\frac{n^n}{n!} < 1.2.3.4\dots n.$$

4. Ist ferner $n = 2\mu + 1$, d. i. n eine ungerade Zahl, und $\mu > 1$; so kann man in 1. wieder

$$m = 2, 3, 4, 5, \dots, \mu$$

setzen, und erhält also

$$2\mu + 1 = 1.(2\mu + 1),$$

$$2\mu + 1 < 2.2\mu,$$

$$\begin{aligned}
2\mu + 1 &< 3.(2\mu - 1), \\
2\mu + 1 &< 4.(2\mu - 2), \\
&\dots \dots \dots \\
2\mu + 1 &< (\mu - 1)(\mu + 3), \\
2\mu + 1 &< \mu(\mu + 2).
\end{aligned}$$

Also ist

$$(2\mu + 1)^\mu < 1.2.3 \dots \mu(\mu + 2)(\mu + 3) \dots (2\mu + 1),$$

wo $\mu > 1$ seyn muss. Für $\mu = 1$ ist $3^1 = 1.3$. Also ist für $\mu > 0$ offenbar

$$(2\mu + 1)^\mu \leq 1.2.3 \dots \mu(\mu + 2)(\mu + 3) \dots (2\mu + 1).$$

Für $\mu > 0$ ist aber, weil

$$(\mu + 1)^2 = \mu^2 + 2\mu + 1$$

ist, offenbar

$$2\mu + 1 < (\mu + 1)^2$$

oder

$$(2\mu + 1)^{\frac{1}{2}} < \mu + 1.$$

Folglich ist für $\mu > 0$ offenbar

$$(2\mu + 1)^\mu . (2\mu + 1)^{\frac{1}{2}} < 1.2.3 \dots \mu(\mu + 1)(\mu + 2)(\mu + 3) \dots (2\mu + 1),$$

d. i.

$$(2\mu + 1)^{\frac{2\mu + 1}{2}} < 1.2.3.4 \dots (2\mu + 1),$$

oder

$$n^{\frac{n}{2}} < 1.2.3.4 \dots n$$

für jedes ungerade n , welches > 1 ist.

5. Nach 3. und 4. ist folglich für jedes n , welches > 2 ist,

$$n^{\frac{n}{2}} < 1.2.3.4 \dots n,$$

und folglich für jedes n , welches > 2 ist,

$$\frac{x^n}{1.2.3 \dots n} < \left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n.$$

Nun ist aber klar, dass die Grösse

$$\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n,$$

wenn man nur n gross genug nimmt, der Null beliebig nahe gebracht werden kann. Also kann um so mehr auch

$$\frac{x^n}{1.2.3 \dots n},$$

wenn man nur n gross genug nimmt, der Null beliebig nahe gebracht werden.

6. Durch das Vorhergehende ist der Satz für jedes positive x bewiesen. Dann ist aber, wie sogleich in die Augen fallen

wird, kein Zweifel, dass derselbe auch für jedes negative x gilt. Daher ist der Satz durch das Vorhergehende allgemein bewiesen.

§. 115.

Aus §. 113. und §. 114. ergeben sich nun unmittelbar die beiden folgenden Sätze, wo ϱ auch wieder immer einen positiven echten Bruch bezeichnet.

I. Wenn der absolute Werth von $f^{(n)}(\varrho x)$, wie weit man auch n wachsen lassen mag, doch niemals eine bestimmte endliche positive Grösse übersteigt, und die Function $f(x)$ nebst ihren sämtlichen Differentialquotienten von $x = 0$ bis $x = x$ stetig ist; so ist jederzeit

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3} f'''(0) + \dots$$

II. Wenn der absolute Werth von $f^{(n)}(x + \varrho i)$, wie weit man auch n wachsen lassen mag, doch niemals eine bestimmte endliche positive Grösse übersteigt, und die Function $f(x)$ nebst ihren sämtlichen Differentialquotienten von $x = x$ bis $x = x + i$ stetig ist; so ist jederzeit

$$f(x+i) = f(x) + \frac{i}{1} f'(x) + \frac{i^2}{1.2} f''(x) + \frac{i^3}{1.2.3} f'''(x) + \dots$$

§. 116.

Man kann die beiden in §. 113. bewiesenen Sätze noch auf einen dritten ebenfalls sehr bemerkenswerthen Ausdruck bringen, wozu aber die folgende analytische Betrachtung vorauszuschicken ist.

Wenn die Functionen

$$f(x), f'(x), f''(x), f'''(x), \dots, f^{(n)}(x)$$

von $x = a$ bis $x = x$ stetig sind, so ist nach §. 110. I.

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{1.2.3} f'''(a) + \dots$$

$$\dots + \frac{(x-a)^{n-1}}{1\dots(n-1)} f^{(n-1)}(a) + \frac{(x-a)^n}{1\dots n} f^{(n)}(a + \varrho(x-a)),$$

oder, wenn wir der Kürze wegen die Grösse

$$\frac{(x-a)^n}{1\dots n} f^{(n)}(a + \varrho(x-a)),$$

indem wir dieselbe als eine Function von a betrachten, durch $\psi(a)$ bezeichnen,

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{1.2.3} f'''(a) + \dots$$

$$\dots + \frac{(x-a)^{n-1}}{1 \dots (n-1)} f^{(n-1)}(a) + \psi(a).$$

Differentiiren wir nun auf beiden Seiten dieser Gleichung nach a ; so erhalten wir, weil $f(x)$ von a ganz unabhängig ist,

$$0 = f'(a)$$

$$+ \frac{x-a}{1} f''(a) - f'(a)$$

$$+ \frac{(x-a)^2}{1.2} f'''(a) - \frac{x-a}{1} f''(a)$$

$$+ \frac{(x-a)^3}{1.2.3} f^{(4)}(a) - \frac{(x-a)^2}{1.2} f'''(a)$$

$$+ \frac{(x-a)^4}{1 \dots 4} f^{(5)}(a) - \frac{(x-a)^3}{1.2.3} f^{(4)}(a)$$

$$\dots$$

$$+ \frac{(x-a)^{n-1}}{1 \dots (n-1)} f^{(n)}(a) - \frac{(x-a)^{n-2}}{1 \dots (n-2)} f^{(n-1)}(a)$$

$$+ \psi'(a),$$

d. i., wenn aufgehoben wird, was sich aufheben lässt,

$$0 = \frac{(x-a)^{n-1}}{1 \dots (n-1)} f^{(n)}(a) + \psi'(a),$$

oder

$$\psi'(a) = - \frac{(x-a)^{n-1}}{1 \dots (n-1)} f^{(n)}(a).$$

Nach §. 110. I. ist aber, wenn man ψ für das dortige f schreibt, und $n = 1$ setzt:

$$\psi(x) = \psi(a) + (x-a)\psi'(a + \varrho(x-a)).$$

Also ist, weil, wenn man in dem vorher für $\psi'(a)$ gefundenen Ausdrücke $a + \varrho(x-a)$ für a setzt,

$$\psi'(a + \varrho(x-a)) = - \frac{(x-a-\varrho(x-a))^{n-1}}{1 \dots (n-1)} f^{(n)}(a + \varrho(x-a))$$

$$= - \frac{(1-\varrho)^{n-1}(x-a)^{n-1}}{1 \dots (n-1)} f^{(n)}(a + \varrho(x-a))$$

ist,

$$\psi(x) = \psi(a) - \frac{(1-\varrho)^{n-1}(x-a)^n}{1 \dots (n-1)} f^{(n)}(a + \varrho(x-a)).$$

Weil aber nach dem Obigen

$$\psi(a) = \frac{(x-a)^n}{1 \dots n} f^{(n)}(a + \varrho(x-a))$$

ist; so ist, wenn man x für a schreibt, offenbar $\psi(x) = 0$, und folglich

$$0 = \psi(a) - \frac{(1-\varrho)^{n-1}(x-a)^n}{1 \dots (n-1)} f^{(n)}(a + \varrho(x-a)),$$

$$\psi(a) = \frac{(1-\varrho)^{n-1}(x-a)^n}{1 \dots (n-1)} f^{(n)}(a + \varrho(x-a)).$$

Hieraus ergibt sich folgender Satz:

Wenn die Functionen

$$f(x), f'(x), f''(x), f'''(x), \dots, f^{(n)}(x)$$

von $x = a$ bis $x = x$ sämmtlich stetig sind; so ist

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{1.2.3} f'''(a) + \dots$$

$$\dots + \frac{(x-a)^{n-1}}{1 \dots (n-1)} f^{(n-1)}(a) + \frac{(1-\varrho)^{n-1}(x-a)^n}{1 \dots (n-1)} f^{(n)}(a + \varrho(x-a)).$$

Setzt man nun $x - a = i$, $x = a + i$; so erhält man

$$f(a+i) = f(a) + \frac{i}{1} f'(a) + \frac{i^2}{1.2} f''(a) + \frac{i^3}{1.2.3} f'''(a) + \dots$$

$$\dots + \frac{i^{n-1}}{1 \dots (n-1)} f^{(n-1)}(a) + \frac{(1-\varrho)^{n-1} i^n}{1 \dots (n-1)} f^{(n)}(a + \varrho i),$$

wo

$$f(x), f'(x), f''(x), f'''(x), \dots, f^{(n)}(x)$$

von $x = a$ bis $x = a + i$ stetig seyn müssen.

Schreibt man x für a ; so ergibt sich

$$f(x+i) = f(x) + \frac{i}{1} f'(x) + \frac{i^2}{1.2} f''(x) + \frac{i^3}{1.2.3} f'''(x) + \dots$$

$$\dots + \frac{i^{n-1}}{1 \dots (n-1)} f^{(n-1)}(x) + \frac{(1-\varrho)^{n-1} i^n}{1 \dots (n-1)} f^{(n)}(x + \varrho i),$$

wo

$$f(x), f'(x), f''(x), f'''(x), \dots, f^{(n)}(x)$$

von $x = x$ bis $x = x + i$ stetig seyn müssen.

Setzt man hierin $x = 0$ und schreibt zugleich x für i ; so erhält man

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3} f'''(0) + \dots$$

$$\dots + \frac{x^{n-1}}{1 \dots (n-1)} f^{(n-1)}(0) + \frac{(1-\varrho)^{n-1} x^n}{1 \dots (n-1)} f^{(n)}(\varrho x),$$

wo

$$f(x), f'(x), f''(x), f'''(x), \dots, f^{(n)}(x)$$

von $x = 0$ bis $x = x$ stetig seyn müssen.

Hieraus ergeben sich nun unmittelbar die beiden folgenden Sätze.

I. Wenn die Function $f(x)$ nebst ihren sämtlichen Differentialquotienten von $x = 0$ bis $x = x$ stetig ist, und die Grösse

$$\frac{(1-\varrho)^{n-1} x^n}{1 \dots (n-1)} f^{(n)}(\varrho x)$$

sich, wenn n wächst, der Null immer mehr und mehr nähert, und derselben beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur n gross genug nimmt; so ist immer

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3} f'''(0) + \dots$$

II. Wenn die Function $f(x)$ nebst ihren sämtlichen Differentialquotienten von $x = x$ bis $x = x + i$ stetig ist, und die Grösse

$$\frac{(1-\varrho)^{n-1} i^n}{1 \dots (n-1)} f^{(n)}(x + \varrho i)$$

sich, wenn n wächst, immer mehr und mehr der Null nähert, und derselben beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur n gross genug nimmt; so ist jederzeit

$$f(x+i) = f(x) + \frac{i}{1} f'(x) + \frac{i^2}{1.2} f''(x) + \frac{i^3}{1.2.3} f'''(x) + \dots$$

Sechstes Kapitel.

Entwicklung der Functionen in Reihen mittelst des Maclaurin'schen Satzes.

§. 117.

Zuerst wollen wir die Function

$$f(x) = (1+x)^\alpha$$

betrachten, bemerken aber, dass in den Fällen, wo α ein Bruch mit geradem Nenner ist, $1+x$ positiv seyn muss, und dass in diesen Fällen die Potenz $(1+x)^\alpha$ immer mit positivem Vorzeichen genommen werden soll.

Durch Differentiation erhält man leicht

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1) (1+x)^{\alpha-n},$$

und folglich, weil wir nach §. 94., da $(1+x)^\alpha$ in den Fällen, wo α ein Bruch mit geradem Nenner ist, positiv genommen werden soll, in diesen Fällen auch $(1+x)^{\alpha-n}$ positiv nehmen müssen,

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1);$$

also

$$\frac{f^{(n)}(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} = \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n},$$

wozu noch zu nehmen ist, dass $f(0) = 1$ ist.

Ferner ist wenn wir der Kürze wegen die Grösse

$$\frac{(1-\varrho)^{n-1} x^n}{1 \dots (n-1)} f^{(n)}(\varrho x),$$

wobei §. 116. I. zu vergleichen ist, durch R_n bezeichnen,

$$R_n = \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{1 \dots (n-1)} x^n (1-\varrho)^{n-1} (1+\varrho x)^{\alpha-n}$$

oder

$$R_n = \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{1 \dots (n-1)} x^n (1+\varrho x)^{\alpha-1} \left(\frac{1-\varrho}{1+\varrho x} \right)^{n-1}.$$

Nehmen wir nun an, dass

$$-1 < x < +1,$$

d. h. dass der absolute Werth von x kleiner als die Einheit ist; so ist der Bruch

$$\frac{1-\varrho}{1+\varrho x},$$

und folglich auch die Potenz

$$\left(\frac{1-\varrho}{1+\varrho x} \right)^{n-1}$$

offenbar stets positiv und nie grösser als die Einheit.

Um ferner auch den Werth, bis zu welchem die Grösse $(1+\varrho x)^{\alpha-1}$ höchstens steigen kann, sicher zu beurtheilen, wollen wir folgende Fälle unterscheiden.

1. Wenn x positiv und auch $\alpha-1$ positiv ist; so erreicht $(1+\varrho x)^{\alpha-1}$ seinen grössten Werth, wenn ϱ seinen grössten Werth erreicht. Da nun ϱ immer kleiner als die Einheit ist; so ist klar, dass in diesem Falle $(1+\varrho x)^{\alpha-1}$ immer kleiner als $(1+x)^{\alpha-1}$ ist.

Wenn ferner x positiv und $\alpha-1$ negativ ist; so erreicht

$$(1+\varrho x)^{\alpha-1} = \frac{1}{(1+\varrho x)^{1-\alpha}}$$

seinen grössten Werth, wenn ϱ seinen kleinsten Werth erreicht. Da nun ϱ immer positiv ist; so ist klar, dass in diesem Falle $(1+\varrho x)^{\alpha-1}$ nie grösser als die Einheit werden kann.

2. Wenn x negativ und $\alpha-1$ positiv ist; so erreicht $(1+\varrho x)^{\alpha-1}$ seinen grössten Werth, wenn ϱ seinen kleinsten Werth erreicht. Da nun ϱ immer positiv ist; so ist klar, dass in diesem Falle $(1+\varrho x)^{\alpha-1}$ nie grösser als die Einheit werden kann.

Wenn ferner x negativ und auch $\alpha-1$ negativ ist; so erreicht

$$(1+\varrho x)^{\alpha-1} = \frac{1}{(1+\varrho x)^{1-\alpha}}$$

seinen grössten Werth, wenn ρ seinen grössten Werth erreicht. Da nun ρ immer kleiner als die Einheit ist; so ist klar, dass in diesem Falle $(1+\rho x)^{\alpha-1}$ immer kleiner als

$$\frac{1}{(1+x)^{1-\alpha}} = (1+x)^{\alpha-1}$$

ist.

Hieraus sieht man, dass die Grösse $(1+\rho x)^{\alpha-1}$ in keinem Falle eine bestimmte endliche Grösse, welche entweder die Potenz $(1+x)^{\alpha-1}$ oder die Einheit ist, übersteigen kann.

Da nun nach dem Vorhergehenden die Grösse

$$\left(\frac{1-\rho}{1+\rho x}\right)^{n-1}$$

nie grösser als die Einheit ist; so ist klar, dass auch die Grösse

$$(1+\rho x)^{\alpha-1} \left(\frac{1-\rho}{1+\rho x}\right)^{n-1}$$

nie eine bestimmte endliche Grösse, welche entweder die Potenz $(1+x)^{\alpha-1}$ oder die Einheit ist, übersteigt.

Ferner setze man jetzt der Kürze wegen

$$t_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{1\dots(n-1)} x^n;$$

so ist, wie man leicht findet,

$$t_{n+1} = -t_n \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)x,$$

$$t_{n+2} = -t_{n+1} \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{n+1}\right)x,$$

$$t_{n+3} = -t_{n+2} \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{n+2}\right)x,$$

$$t_{n+4} = -t_{n+3} \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{n+3}\right)x,$$

u. s. w.

und folglich

$$t_{n+1} = -t_n \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)x,$$

$$t_{n+2} = t_n \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)\left(1 - \frac{\alpha}{n+1}\right)x^2,$$

$$t_{n+3} = -t_n \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)\left(1 - \frac{\alpha}{n+1}\right)\left(1 - \frac{\alpha}{n+2}\right)x^3,$$

$$t_{n+4} = t_n \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)\left(1 - \frac{\alpha}{n+1}\right)\left(1 - \frac{\alpha}{n+2}\right)\left(1 - \frac{\alpha}{n+3}\right)x^4,$$

u. s. w.

Die absoluten Werthe von x und von

$$t_n, t_{n+1}, t_{n+2}, t_{n+3}, t_{n+4}, \dots$$

wollen wir respective durch ξ und durch

$$\tau_n, \tau_{n+1}, \tau_{n+2}, \tau_{n+3}, \tau_{n+4}, \dots$$

bezeichnen, und unterscheiden nun die beiden folgenden Fälle.

1. Wenn α positiv ist, so wollen wir uns n so gross genommen denken, dass $n > \alpha$ ist. Dann ist

$$\tau_{n+1} = \tau_n \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) \xi,$$

$$\tau_{n+2} = \tau_n \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) \left(1 - \frac{\alpha}{n+1}\right) \xi^2,$$

$$\tau_{n+3} = \tau_n \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) \left(1 - \frac{\alpha}{n+1}\right) \left(1 - \frac{\alpha}{n+2}\right) \xi^3,$$

$$\tau_{n+4} = \tau_n \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) \left(1 - \frac{\alpha}{n+1}\right) \left(1 - \frac{\alpha}{n+2}\right) \left(1 - \frac{\alpha}{n+3}\right) \xi^4,$$

u. s. w.

und folglich offenbar

$$\tau_{n+1} < \tau_n \xi,$$

$$\tau_{n+2} < \tau_n \xi^2,$$

$$\tau_{n+3} < \tau_n \xi^3,$$

$$\tau_{n+4} < \tau_n \xi^4,$$

u. s. w.

Also nähern sich, weil nach der Voraussetzung $\xi < 1$ ist, die Grössen

$$\tau_n, \tau_{n+1}, \tau_{n+2}, \tau_{n+3}, \tau_{n+4}, \dots,$$

wenn nur erst n grösser als α ist, offenbar immer mehr und mehr, und auch, wenn man sich nur weit genug vom Anfange der vorstehenden Reihe entfernt, bis zu jedem beliebigen Grade der Null.

2. In dem Falle, wo α negativ ist, wollen wir grösserer Deutlichkeit wegen $-\alpha$ für α , und folglich

$$\tau_{n+1} = \tau_n \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) \xi,$$

$$\tau_{n+2} = \tau_n \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) \left(1 + \frac{\alpha}{n+1}\right) \xi^2,$$

$$\tau_{n+3} = \tau_n \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) \left(1 + \frac{\alpha}{n+1}\right) \left(1 + \frac{\alpha}{n+2}\right) \xi^3,$$

$$\tau_{n+4} = \tau_n \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) \left(1 + \frac{\alpha}{n+1}\right) \left(1 + \frac{\alpha}{n+2}\right) \left(1 + \frac{\alpha}{n+3}\right) \xi^4,$$

u. s. w.

setzen. In diesem Falle ist offenbar

$$\tau_{n+1} = \tau_n \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^\xi,$$

$$\tau_{n+2} < \tau_n \cdot \left\{ \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^\xi \right\}^2,$$

$$\tau_{n+3} < \tau_n \cdot \left\{ \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^\xi \right\}^3,$$

$$\tau_{n+4} < \tau_n \cdot \left\{ \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^\xi \right\}^4,$$

u. s. w.

Nun kann man aber n immer so gross annehmen, dass

$$\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^\xi < 1$$

ist, wie sich auf folgende Art leicht zeigen lässt.

Dies wird nämlich der Fall seyn, wenn

$$\xi + \frac{\alpha}{n}\xi < 1$$

ist, und dies wird der Fall seyn, wenn n so gross genommen wird, dass

$$\frac{\alpha}{n}\xi < 1 - \xi,$$

d. h. dass

$$n > \frac{\alpha\xi}{1-\xi}$$

ist, welches offenbar immer möglich ist.

Nimmt man also nur n dieser Bedingung gemäss; so ist

$$\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^\xi < 1,$$

und die Grössen

$$\tau_n, \tau_{n+1}, \tau_{n+2}, \tau_{n+3}, \tau_{n+4}, \dots$$

nähern sich dann nach dem Obigen offenbar immer mehr und mehr, und auch, wenn man sich nur weit genug vom Anfange der vorstehenden Reihe entfernt, bis zu jedem beliebigen Grade der Null.

Man sieht also jetzt, dass man in jedem Falle n so gross annehmen kann, dass sich die Grössen

$$\tau_n, \tau_{n+1}, \tau_{n+2}, \tau_{n+3}, \tau_{n+4}, \dots$$

immer mehr und mehr, und auch, wenn man sich nur weit genug vom Anfange dieser Reihe entfernt, bis zu jedem beliebigen Grade der Null nähern. Nimmt man hierzu nun noch, dass nach dem Obigen die Grösse

$$(1+\rho x)^{\alpha-1} \left(\frac{1-\rho}{1+\rho x} \right)^{n-1}$$

nie eine gewisse endliche bestimmte Grösse, welche entweder die Potenz $(1+x)^{\alpha-1}$ oder die Einheit ist, übersteigt; so ist klar, dass man die Grösse

$$t_n (1+\rho x)^{\alpha-1} \left(\frac{1-\rho}{1+\rho x} \right)^{n-1},$$

d. i.

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{1\dots(n-1)} x^n (1+\rho x)^{\alpha-1} \left(\frac{1-\rho}{1+\rho x} \right)^{n-1}$$

oder

$$R_n = \frac{(1-\rho)^{n-1} x^n}{1\dots(n-1)} f^{(n)}(\rho x),$$

unter der immer Statt findenden Voraussetzung, dass

$$-1 < x < +1$$

ist, jederzeit der Null beliebig nahe bringen kann, wenn man nur n gross genug annimmt. Daher ist nach §. 116. I.

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2.3}x^3 + \dots$$

$$\{-1 < x < +1\}$$

oder mittelst der aus §. 14. IV. bekannten Bezeichnung der Binomial-Coefficienten

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots + \alpha_k x^k + \dots$$

$$\{-1 < x < +1\}.$$

Soll man aus einer beliebigen positiven ganzen Zahl K , aus der sich die n te Wurzel nicht genau ausziehen lässt, die Wurzel dieses Grades näherungsweise ausziehen; so kann dies mittelst der vorhergehenden Reihe auf folgende Art geschehen. Es werden sich immer zwei positive ganze Zahlen a und $a+1$ von solcher Beschaffenheit angeben lassen, dass $a^n < K < (a+1)^n$ ist. Ist nun zuerst $K - a^n < a^n$; so setze man $K = a^n + b$, wo also $b = K - a^n$ und folglich $b < a^n$ ist. Dann ist

$$K^{\frac{1}{n}} = (a^n + b)^{\frac{1}{n}} = a \left(1 + \frac{b}{a^n} \right)^{\frac{1}{n}},$$

und man kann nun, weil $\frac{b}{a^n} < 1$ ist, $\left(1 + \frac{b}{a^n} \right)^{\frac{1}{n}}$ nach dem Vorhergehenden in eine convergirende Reihe entwickeln. Ist aber $K - a^n \geq a^n$; so muss man $K = (a+1)^n - c$ setzen, wo nun $c = (a+1)^n - K$ und folglich offenbar $c < (a+1)^n$ ist. Dann ist

$$K^{\frac{1}{n}} = \{ (a+1)^n - c \}^{\frac{1}{n}} = (a+1) \left\{ 1 - \frac{c}{(a+1)^n} \right\}^{\frac{1}{n}},$$

und man kann nun wieder, weil $\frac{c}{(a+1)^n} < 1$ ist, die aus dem Vorhergehenden bekannte Reihe anwenden. Soll man z. B. aus 6 die Quadratwurzel ausziehen; so wird man $6 = 4 + 2$, und folglich $\sqrt{6} = 2(1 + \frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$ setzen. Soll dagegen aus 59 die Cubikwurzel ausgezogen werden; so darf man nicht $59 = 27 + 32$ setzen, sondern es muss $59 = 64 - 5$, und folglich $\sqrt[3]{59} = 4(1 - \frac{5}{64})^{\frac{1}{3}}$ gesetzt werden.

§. 118.

Wir wollen uns nun ferner mit der Entwicklung der wichtigen Function

$$f(x) = a^x,$$

wo a eine positive Grösse bezeichnet, in eine Reihe beschäftigen.

Nach §. 55. ist

$$f'(x) = a^x \varphi(a),$$

wo $\varphi(a)$ die Gränze bezeichnet, welcher die Grösse

$$\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

sich nähert, wenn Δx sich der Null nähert; und dass es eine solche Gränze, der auch die in Rede stehende Grösse beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur Δx nahe genug bei Null annimmt, in jedem Falle wirklich giebt, ist a. a. O. umständlich gezeigt worden. Entwickeln wir nun die höhern Differentialquotienten unserer gegebenen Function auf bekannte Weise; so erhalten wir sehr leicht in völliger Allgemeinheit

$$f^{(n)}(x) = a^x \{\varphi(a)\}^n$$

und folglich

$$f^{(n)}(0) = \{\varphi(a)\}^n$$

und

$$f^{(n)}(\varrho x) = a^{\varrho x} \{\varphi(a)\}^n,$$

wozu noch zu nehmen ist, dass $f(0) = 1$ ist.

Also ist nach §. 109.

$$a^x = 1 + \frac{x\varphi(a)}{1} + \frac{\{x\varphi(a)\}^2}{1.2} + \frac{\{x\varphi(a)\}^3}{1.2.3} + \dots$$

$$\dots + \frac{\{x\varphi(a)\}^{n-1}}{1 \dots (n-1)} + \frac{\{x\varphi(a)\}^n}{1 \dots n} a^{\varrho x}.$$

Nach §. 114. nähert sich, was auch x und $\varphi(a)$ seyn mögen,

$$\frac{\{x\varphi(a)\}^n}{1 \dots n}$$

der Null, wenn n wächst, und kann derselben jederzeit beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur n gross genug nimmt. Nun erhellet aber, weil ϱ immer positiv und kleiner als die Einheit ist, dass die Grösse $a^{\varrho x}$, x mag positiv oder negativ

seyn, nie einen gewissen bestimmten endlichen Werth, welcher offenbar entweder a^x oder die Einheit ist, übersteigen kann. Daher nähert sich auch die Grösse

$$\frac{\{x\varphi(a)\}^n}{1 \dots n} a^{ax}$$

der Null, wenn n wächst, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur n gross genug nimmt. Folglich ist, was auch x und a seyn mögen, wenn nur, wie hier immer vorausgesetzt wird, a positiv ist, jederzeit

$$a^x = 1 + \frac{x\varphi(a)}{1} + \frac{\{x\varphi(a)\}^2}{1.2} + \frac{\{x\varphi(a)\}^3}{1.2.3} + \dots$$

Setzt man nun, was jederzeit verstattet ist,

$$x = \frac{1}{\varphi(a)};$$

so erhält man

$$\frac{1}{a^{\varphi(a)}} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \dots,$$

woraus, weil die Grösse

$$\frac{1}{a^{\varphi(a)}},$$

wie aus §. 55. hervorgeht, eine völlig bestimmte endliche Grösse ist, zugleich erhellet, dass die Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens convergent ist. Bezeichnen wir nun die Summe dieser convergenten Reihe durch E ; so ist für jedes positive a

$$\frac{1}{a^{\varphi(a)}} = E.$$

Da aber E offenbar positiv ist; so kann man in dieser Gleichung auch E für a setzen, und erhält also

$$\frac{1}{E^{\varphi(E)}} = E,$$

woraus sich auf der Stelle

$$\frac{1}{\varphi(E)} = 1$$

oder

$$\varphi(E) = 1$$

ergiebt.

Hieraus sieht man, dass die durch E bezeichnete Summe der convergirenden Reihe

$$1, \frac{1}{1}, \frac{1}{1.2}, \frac{1}{1.2.3}, \frac{1}{1.2.3.4}, \dots$$

der Werth von a ist, für welchen $\varphi(a) = 1$ ist, so dass es also, welches in §. 56. noch fraglich blieb, einen solchen Werth von a wirklich giebt. In §. 56. wurde dieser Werth von a durch e bezeichnet, und es ist also $e = E$ oder

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \dots$$

Dass man mittelst der Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens den numerischen Werth von e mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit berechnen kann, versteht sich, weil die in Rede stehende Reihe convergirt, von selbst. Betrachtet man die Summe der n ersten Glieder dieser Reihe, nämlich die Grösse

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \dots + \frac{1}{1 \dots (n-1)}$$

als einen Näherungswerth von e , und setzt

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots + \frac{1}{1 \dots (n-1)} + F;$$

so ist

$$F = \frac{1}{1 \dots n} + \frac{1}{1 \dots (n+1)} + \frac{1}{1 \dots (n+2)} + \frac{1}{1 \dots (n+3)} + \dots$$

der Fehler, welchen man bei dieser Näherung begeht.

Die Grösse dieses Fehlers lässt sich auf folgende Art beurtheilen. Setzt man

$$\frac{1}{1 \dots n} = t;$$

so ist offenbar

$$F < t \left\{ 1 + \frac{1}{n+1} + \left(\frac{1}{n+1} \right)^2 + \left(\frac{1}{n+1} \right)^3 + \left(\frac{1}{n+1} \right)^4 + \dots \right\}.$$

Weil nun offenbar

$$\frac{1}{n+1} < 1$$

ist; so ist nach §. 117.

$$\left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{-1} = 1 + \frac{1}{n+1} + \left(\frac{1}{n+1} \right)^2 + \left(\frac{1}{n+1} \right)^3 + \left(\frac{1}{n+1} \right)^4 + \dots$$

und folglich

$$F < t \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{-1},$$

d. i.

$$F < t \cdot \frac{n+1}{n}$$

oder

$$F < \frac{1}{1.2.3 \dots n} \cdot \frac{n+1}{n}.$$

Setzt man z. B.

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \dots + \frac{1}{1 \dots 10};$$

so ist der Fehler

$$F < \frac{1}{1 \dots 11} \cdot \frac{12}{11},$$

d. i.

$$F < \frac{1}{36590400}.$$

Man sieht hieraus, dass der Fehler bald sehr klein wird, und dass also die obige Reihe zur Berechnung von e sehr bequem ist. Bis zur drei und zwanzigsten Decimalstelle genau ist

$$e = 2,71828182845904523536028.$$

In §. 57. ist schon die Gleichung

$$\varphi(a) = la$$

bewiesen worden. Also ist nach dem Obigen

$$a^x = 1 + \frac{xla}{1} + \frac{(xla)^2}{1.2} + \frac{(xla)^3}{1.2.3} + \frac{(xla)^4}{1.2.3.4} + \dots,$$

und, wenn man $x = 1$ setzt,

$$a = 1 + \frac{la}{1} + \frac{(la)^2}{1.2} + \frac{(la)^3}{1.2.3} + \frac{(la)^4}{1.2.3.4} + \dots$$

Setzt man $a = e$, so ist $la = le = 1$, und folglich

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \dots$$

§. 119.

Sey ferner die Function

$$f(x) = l(1 + x)$$

gegeben.

Setzt man der Kürze wegen

$$f(x) = y, \quad 1 + x = z;$$

so erhält man durch Differentiation leicht

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial l z}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{z},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{1}{z^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{z^2},$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{1.2}{z^3} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1.2}{z^3},$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\frac{1.2.3}{z^4} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1.2.3}{z^4},$$

$$\frac{\partial^5 y}{\partial x^5} = \frac{1.2.3.4}{z^5} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1.2.3.4}{z^5},$$

u. s. w.

Also ist allgemein

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1.2.3 \dots (n-1)}{z^n}$$

oder

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1.2.3 \dots (n-1)}{(1+x)^n},$$

und folglich

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1),$$

wozu noch zu nehmen ist, dass offenbar

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1$$

ist.

Ferner ist

$$f^{(n)}(\rho x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}{(1 + \rho x)^n},$$

und folglich

$$\frac{(1-\rho)^{n-1} x^n}{1 \dots (n-1)} f^{(n)}(\rho x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(1-\rho)^{n-1} x^n}{(1 + \rho x)^n},$$

oder

$$\frac{(1-\rho)^{n-1} x^n}{1 \dots (n-1)} f^{(n)}(\rho x) = \frac{(-1)^{n-1}}{1-\rho} \cdot \left\{ \frac{(1-\rho)x}{1 + \rho x} \right\}^n.$$

Wenn der absolute Werth von x kleiner als die Einheit ist; so ist die Grösse

$$\frac{1-\rho}{1 + \rho x},$$

so wie auch die Grösse

$$\frac{\rho(1+x)}{1 + \rho x}$$

stets positiv. Weil nun

$$\frac{1-\rho}{1 + \rho x} = 1 - \frac{\rho(1+x)}{1 + \rho x}$$

ist; so ist, wenn der absolute Werth von x kleiner als die Einheit ist, die Grösse

$$\frac{1-\rho}{1 + \rho x}$$

nie grösser als die Einheit. Die Potenz x^n nähert sich unter derselben Voraussetzung rücksichtlich des absoluten Werthes von x , wenn n wächst, immer mehr und mehr der Null, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur n gross genug nimmt. Also nähert sich offenbar auch

$$\left\{ \frac{(1-\rho)x}{1 + \rho x} \right\}^n = \left(\frac{1-\rho}{1 + \rho x} \right)^n \cdot x^n,$$

wenn n wächst, der Null, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur n gross genug nimmt. Der Bruch

$$\frac{1}{1-\rho}$$

kann aber, weil ρ bekanntlich immer kleiner als die Einheit ist, offenbar eine gewisse bestimmte endliche Grösse niemals übersteigen, Daher nähert sich auch

$$\frac{(-1)^{n-1}}{1-\rho} \cdot \left\{ \frac{(1-\rho)x}{1 + \rho x} \right\}^n,$$

d. i.

$$\frac{(1-\varrho)^{n-1} x^n}{1 \dots (n-1)} f^{(n)}(\varrho x),$$

wenn n wächst, der Null, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur n gross genug nimmt, immer unter der Voraussetzung, dass der absolute Werth von x kleiner als die Einheit ist.

Folglich ist nach §. 116. I.

$$l(1+x) = x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{5} x^5 - \dots$$

$$\{ -1 < x < +1 \}$$

Auf folgende Art kann aber gezeigt werden, dass diese Gleichung auch noch für $x = +1$ gilt. Es ist nämlich

$$\frac{x^n}{1 \dots n} f^{(n)}(\varrho x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} \left\{ \frac{x}{1+\varrho x} \right\}^n,$$

und folglich für $x = +1$

$$\frac{1}{1 \dots n} f^{(n)}(\varrho) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{1+\varrho} \right\}^n.$$

Da nun der Bruch

$$\frac{1}{1+\varrho},$$

und folglich auch

$$\left\{ \frac{1}{1+\varrho} \right\}^n$$

niemals grösser als die Einheit ist, der Bruch $\frac{1}{n}$ sich aber, wenn n wächst, immer mehr und mehr der Null nähert, und derselben beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur n gross genug nimmt; so ist klar, dass sich auch

$$\frac{1}{1 \dots n} f^{(n)}(\varrho),$$

wenn n wächst, der Null nähert, und derselben beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur n gross genug nimmt. Folglich ist nach §. 113. I.

$$l(1+1) = l2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

und daher, wie sich nun hieraus in Verbindung mit dem Obigen ergibt,

$$l(1+x) = x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{5} x^5 - \dots$$

$$\{ -1 < x = +1 \}$$

Nach §. 58. ist

$$\log(1+x) = Ml(1+x),$$

wo die durch $\log$ bezeichneten Logarithmen sich auf die Basis b beziehen. Nach demselben Paragraphen ist aber auch

$$M = \frac{1}{lb}.$$

Also ist nach dem Vorhergehenden

$$\log(1+x) = \frac{1}{lb} (x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \dots)$$

$$\{-1 < x < +1\}$$

§. 120.

Nach §. 119. ist, wenn der absolute Werth von x kleiner als die Einheit ist,

$$l(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \dots,$$

$$l(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 - \dots$$

Also ist

$$l \frac{1+x}{1-x} = 2(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 + \dots)$$

$$\{-1 < x < +1\}$$

Setzt man jetzt

$$x = \frac{z-1}{z+1};$$

so ist für jedes positive z , welches nur nicht $= 0$ ist, offenbar

$$-1 < x < +1.$$

Also ist für jedes positive z , welches nicht $= 0$ ist, nach dem Vorhergehenden

$$l \frac{1 + \frac{z-1}{z+1}}{1 - \frac{z-1}{z+1}} = 2 \left\{ \frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^5 + \dots \right\},$$

d. i.

$$lz = 2 \left\{ \frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^5 + \dots \right\}$$

$$\{0 < z < \infty\}$$

Setzt man z^2 für z ; so erhält man

$$lz = \frac{z^2-1}{z^2+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{z^2-1}{z^2+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{z^2-1}{z^2+1} \right)^5 + \dots$$

$$\{0 < z < \infty\}$$

Da die Basis b der durch $\log$ bezeichneten Logarithmen ihrer Natur nach grösser als Null seyn muss, und

$$M = \frac{1}{lb}$$

ist; so ergibt sich aus dem Vorhergehenden der folgende Ausdruck für den Modulus des Systems, dessen Basis b ist:

$$M = \frac{1}{2 \left\{ \frac{b-1}{b+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{b-1}{b+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{b-1}{b+1} \right)^5 + \dots \right\}}$$

oder

$$M = \frac{1}{\frac{b^2-1}{b^2+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{b^2-1}{b^2+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{b^2-1}{b^2+1} \right)^5 + \dots}$$

Für den Modulus des briggischen Systems erhält man aus diesen Formeln

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2 \left\{ \frac{9}{11} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{9}{11} \right)^3 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{9}{11} \right)^5 + \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{9}{11} \right)^7 + \dots \right\}} \\ &= \frac{1}{\frac{99}{101} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{99}{101} \right)^3 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{99}{101} \right)^5 + \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{99}{101} \right)^7 + \dots} \\ &= 0,4342944819032518276511289. \end{aligned}$$

Noch eine andere Art, den Modulus zu berechnen, ist folgende. Bezeichnet ω eine beliebige positive ganze Zahl; so kann man, wenn man nur ω gross genug annimmt, den Bruch $\frac{1}{\omega}$ der Null, die Potenz $b^{\frac{1}{\omega}} = \sqrt[\omega]{b}$ folglich der Einheit beliebig nahe bringen. Setzen wir nun voraus, dass ω mindestens so gross angenommen worden ist, dass $\sqrt[\omega]{b} - 1 < 1$ ist; so ist nach §. 119.

$$\log \sqrt[\omega]{b} = M \{ \sqrt[\omega]{b} - 1 - \frac{1}{2} (\sqrt[\omega]{b} - 1)^2 + \frac{1}{3} (\sqrt[\omega]{b} - 1)^3 - \dots \},$$

und folglich, weil $\log \sqrt[\omega]{b} = \frac{1}{\omega} \log b = \frac{1}{\omega}$ ist,

$$\frac{1}{M} = \omega \left\{ \sqrt[\omega]{b} - 1 - \frac{1}{2} (\sqrt[\omega]{b} - 1)^2 + \frac{1}{3} (\sqrt[\omega]{b} - 1)^3 - \dots \right\},$$

wo die eingeklammerte Reihe, da nach dem Obigen $\sqrt[\omega]{b}$ der Einheit beliebig nahe gebracht werden kann, mit jedem beliebigen Grade convergent gemacht werden kann. Hat man aber $\frac{1}{M}$, so hat man natürlich auch M .

Setzt man

$$x = \frac{z}{2n+z}$$

und nimmt an, dass z und n beide positiv sind, und wenigstens n nicht $= 0$ ist; so ist x offenbar positiv und kleiner als die Einheit. Also ist, weil

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+z}{n}$$

ist, nach dem Obigen

$$l \frac{n+z}{n} = 2 \left\{ \frac{z}{2n+z} + \frac{1}{3} \left(\frac{z}{2n+z} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{z}{2n+z} \right)^5 + \dots \right\}$$

oder

$$l(n+z) = ln + 2 \left\{ \frac{z}{2n+z} + \frac{1}{3} \left(\frac{z}{2n+z} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{z}{2n+z} \right)^5 + \dots \right\},$$

immer unter der Voraussetzung, dass z und n beide positiv sind, und n nicht $= 0$ ist. Mittelst dieser Reihe lässt sich vorzüglich dann, wenn n gegen z gross ist, $l(n+z)$ sehr leicht berechnen, wenn man ln schon kennt. So ist z. B. für $n = 100$ und $z = 1$

$$l101 = l100 + 2 \left\{ \frac{1}{201} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{201} \right)^3 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{201} \right)^5 + \dots \right\},$$

wo die eingeklammerte Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens sehr schnell convergirt.

§. 121.

Die gegebene in eine Reihe zu entwickelnde Function sey jetzt

$$f(x) = \sin x.$$

Nach §. 98. ist

$$f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{1}{2} n\pi);$$

also

$$f^{(n)}(0) = \sin \frac{1}{2} n\pi$$

und

$$f^{(n)}(qx) = \sin(\frac{1}{2} n\pi + qx).$$

Hieraus erhellet, dass der absolute Werth von $f^{(n)}(qx)$ die Einheit niemals übersteigen kann. Weil nun

$$f(0) = 0,$$

$$f'(0) = \sin \frac{1}{2} \pi = + 1,$$

$$f''(0) = \sin \pi = 0,$$

$$f'''(0) = \sin \frac{3}{2} \pi = - 1,$$

$$f^{(iv)}(0) = \sin 2\pi = 0,$$

$$f^{(v)}(0) = \sin \frac{5}{2} \pi = + 1,$$

$$f^{(vi)}(0) = \sin 3\pi = 0,$$

$$f^{(vii)}(0) = \sin \frac{7}{2} \pi = - 1,$$

u. s. w.

ist; so ergiebt sich aus §. 115. I. unmittelbar die für jedes x geltende, höchst merkwürdige und wichtige Reihe

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1...5} - \frac{x^7}{1...7} + \frac{x^9}{1...9} - \dots$$

§. 122.

In eine ähnliche nicht minder merkwürdige Reihe lässt sich auch die Function

$$f(x) = \cos x$$

entwickeln.

Nach §. 98. ist

$$f^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{1}{2}n\pi);$$

also

$$f^{(n)}(0) = \cos \frac{1}{2}n\pi$$

und

$$f^{(n)}(\rho x) = \cos(\frac{1}{2}n\pi + \rho x).$$

Hieraus sieht man, dass der absolute Werth von $f^{(n)}(\rho x)$ die Einheit nie übersteigen kann. Weil nun

$$f(0) = 1,$$

$$f'(0) = \cos \frac{1}{2}\pi = 0,$$

$$f''(0) = \cos \pi = -1,$$

$$f'''(0) = \cos \frac{3}{2}\pi = 0,$$

$$f^{(iv)}(0) = \cos 2\pi = +1,$$

$$f^{(v)}(0) = \cos \frac{5}{2}\pi = 0,$$

$$f^{(vi)}(0) = \cos 3\pi = -1,$$

$$f^{(vii)}(0) = \cos \frac{7}{2}\pi = 0,$$

u. s. w.

ist; so ergibt sich aus §. 115. I. unmittelbar die für jedes x geltende höchst merkwürdige Reihe

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1...4} - \frac{x^6}{1...6} + \frac{x^8}{1...8} - \dots$$

§. 123.

Ferner wollen wir nun auch die Function

$$f(x) = \text{Arc tang } x$$

in eine Reihe zu entwickeln suchen.

Zuerst ist zu bemerken, dass, wenn k eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet,

$$f(0) = k\pi$$

ist.

Ferner ist nach §. 70.

$$f'(0) = 1.$$

Ueberhaupt ist, wenn man

$$\text{Arc tang } x = \varphi$$

setzt, nach §. 99.

$$f^{(n)}(x) = 1.2.3 \dots (n-1)(-1)^{n-1} \cos \varphi^n \sin n(\frac{1}{2}\pi - \varphi).$$

Für $x = 0$ ist $\varphi = k\pi$, also $\cos \varphi = (-1)^k$, und folglich

$$\cos \varphi^n \sin n(\frac{1}{2}\pi - \varphi) = (-1)^{kn} \sin \left(\frac{n}{2}\pi - nk\pi \right)$$

$$= (-1)^{kn} \left\{ \sin \frac{n}{2}\pi \cos nk\pi - \cos \frac{n}{2}\pi \sin nk\pi \right\}$$

$$= (-1)^{kn} (-1)^{kn} \sin \frac{n}{2}\pi = (-1)^{2kn} \sin \frac{n}{2}\pi = \sin \frac{n}{2}\pi.$$

Also ist

$$f^{(n)}(0) = 1.2.3 \dots (n-1)(-1)^{n-1} \sin \frac{n}{2} \pi,$$

und folglich

$$\frac{f^{(n)}(0)}{1.2.3 \dots n} = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin \frac{n}{2} \pi.$$

Ferner ist, wenn wir der Kürze wegen

$$\text{Arc tang } \rho x = \theta$$

setzen,

$$f^{(n)}(\rho x) = 1.2.3 \dots (n-1)(-1)^{n-1} \cos \theta^n \sin n(\frac{1}{2} \pi - \theta)$$

und folglich

$$\frac{x^n}{1 \dots n} f^{(n)}(\rho x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} \cos \theta^n \sin n(\frac{1}{2} \pi - \theta).$$

Hieraus folgt auf der Stelle, dass für jedes x , dessen absoluter Werth nicht grösser als die Einheit ist, die Grösse

$$\frac{x^n}{1 \dots n} f^{(n)}(\rho x)$$

sich, wenn n wächst, der Null nähert, und derselben beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur n gross genug nimmt.

Also ist, wie sich nun, wenn man alles Vorhergehende zusammen nimmt, aus §. 113. I. leicht ergibt,

$$\text{Arctang } x = k\pi + x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \dots$$

$$\{-1 = x = +1\}$$

Dass auf der rechten Seite dieser Gleichung die Grösse $k\pi$, welche in so fern völlig unbestimmt ist, als man nur weiss, dass k eine positive oder negative ganze Zahl ist, vorkommt, darf nicht Wunder nehmen, da ja $\text{Arc tang } x$ eine Grösse ist, welche unendlich viele verschiedene Werthe haben kann. Die Grösse k muss nun aber näher bestimmt werden.

§. 124.

Zu dem Ende wollen wir jetzt $\text{Arc tang } x$ den der Tangente x entsprechenden Bogen bezeichnen lassen, welcher den kleinsten absoluten Werth hat, so dass also, weil der absolute Werth von x die Einheit nicht übersteigen darf, der absolute Werth von $\text{Arc tang } x$ nicht grösser als $\frac{1}{4}\pi$ ist.

Ist zuerst x positiv, so ist auch $\text{Arc tang } x$ positiv. Wäre nun die ganze Zahl $k > 0$; so wäre, weil nach §. 123.

$$\text{Arc tang } x = k\pi + (x - \frac{1}{3}x^3) + (\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7) + \dots$$

und x nicht grösser als die Einheit ist, offenbar

$$\text{Arc tang } x \leq \pi,$$

da doch

$$\text{Arctang } x \leq \frac{1}{4}\pi$$

ist, und es kann also nicht $k > 0$ seyn. Wäre ferner die ganze Zahl $k < 0$; so wäre, weil nach §. 123.

$$\text{Arc tang } x = k\pi + x - (\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5) - (\frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{9}x^9) - \dots$$

und x nicht grösser als die Einheit ist, offenbar

$$\text{Arc tang } x \leq k\pi + x$$

oder

$$x - \text{Arctang } x \leq -k\pi,$$

und folglich

$$x - \text{Arctang } x \leq \pi$$

oder

$$x \leq \pi + \text{Arctang } x,$$

also auch $x \leq \pi$. Weil nun aber, wie die Geometrie lehrt, die Seite des in einen Kreis beschriebenen regulären Sechsecks dem Radius des Kreises, d. i. der Einheit gleich ist; so ist $2\pi > 6$, $\pi > 3$. Folglich wäre $x > 3$, da doch x nach der Voraussetzung die Einheit nicht übersteigt. Also kann auch nicht $k < 0$ seyn, und es muss folglich, weil weder $k > 0$, noch $k < 0$ seyn kann, $k = 0$ seyn. Ist also x positiv und übersteigt die Einheit nicht; so ist

$$\text{Arctang } x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \dots,$$

immer unter der Voraussetzung, dass $\text{Arctang } x$ der kleinste zu der Tangente x gehörende Bogen ist.

Ist ferner x negativ, so ist $-x$ positiv. Also ist nach dem Vorhergehenden, wenn nur der absolute Werth von x die Einheit nicht übersteigt,

$$\text{Arctang } (-x) = -x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{9}x^9 + \dots$$

Weil nun aber bekanntlich

$$\text{Arctang } x = -\text{Arctang } (-x)$$

ist; so ist auch in diesem Falle

$$\text{Arctang } x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \dots$$

Nimmt man jetzt das Vorhergehende zusammen; so ergibt sich, immer unter der Voraussetzung, dass $\text{Arctang } x$ der zu der Tangente x gehörende Bogen ist, welcher den kleinsten absoluten Werth hat, die folgende in jeder Beziehung höchst merkwürdige und wichtige Gleichung:

$$\text{Arctang } x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \dots$$

$$\{-1 = x = +1\}$$

§. 125.

Mittelst der im vorhergehenden Paragraphen bewiesenen Gleichung kann man auf verschiedene Arten die Zahl π berechnen.

Setzt man nämlich in dieser Gleichung zuerst $x = 1$; so erhält man

$$\frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots,$$

eine Reihe, welche man, wie leicht erhellen wird, auch unter folgender Form darstellen kann:

$$\frac{1}{4}\pi = 2 \left\{ \frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \frac{1}{13.15} + \dots \right\}$$

oder

$$\frac{1}{8}\pi = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \frac{1}{13.15} + \dots$$

Ferner ist, wie leicht gezeigt werden kann,

$$\operatorname{tang} \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

und folglich nach der in §. 124. bewiesenen Gleichung

$$\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ 1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.3^2} - \frac{1}{7.3^3} + \frac{1}{9.3^4} - \dots \right\}.$$

Durch einen sehr merkwürdigen Kunstgriff hat Euler Ausdrücke gefunden, welche zur Berechnung von π vorzüglich bequem sind. Dieser Kunstgriff besteht im Allgemeinen darin, dass Euler einen Bogen, dessen Verhältniss zur Peripherie rational ist, in zwei oder mehrere andere Bogen zerlegt, deren Tangenten rational sind. Entwickelt man dann diese Bogen nach §. 124. in Reihen, so wird man durch deren Vereinigung mit einander für den zerlegten Bogen einen Ausdruck erhalten, der zwar aus mehrern unendlichen Reihen zusammengesetzt ist; diese Reihen werden aber oft sehr stark convergiren, und auch sonst eine leichte numerische Rechnung gestatten.

Einige der hierher gehörenden Formeln sind folgende.

$$1. \operatorname{Arctang} \frac{1}{2} + \operatorname{Arctang} \frac{1}{3} = \frac{1}{4}\pi.$$

Um die Richtigkeit dieser Gleichung zu beweisen, setze man

$$\operatorname{Arctang} \frac{1}{2} = \varphi, \operatorname{Arctang} \frac{1}{3} = \psi;$$

so ist

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{1}{2}, \operatorname{tang} \psi = \frac{1}{3}.$$

Weil nun bekanntlich

$$\operatorname{tang}(\varphi + \psi) = \frac{\operatorname{tang} \varphi + \operatorname{tang} \psi}{1 - \operatorname{tang} \varphi \operatorname{tang} \psi}$$

ist; so ist

$$\operatorname{tang}(\varphi + \psi) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1$$

und folglich

$$\varphi + \psi = \frac{1}{4}\pi,$$

d. i.

$$\operatorname{Arctang} \frac{1}{2} + \operatorname{Arctang} \frac{1}{3} = \frac{1}{4}\pi,$$

wie bewiesen werden sollte.

$$2. \quad 2\operatorname{Arctang} \frac{1}{2} - \operatorname{Arctang} \frac{1}{7} = \frac{1}{4}\pi.$$

Um diese Gleichung zu beweisen, setze man

$$\operatorname{Arctang} \frac{1}{2} = \varphi, \operatorname{Arctang} \frac{1}{7} = \psi;$$

so ist

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{1}{2}, \operatorname{tang} \psi = \frac{1}{7}.$$

Weil nun

$$\operatorname{tang} 2\varphi = \frac{2\operatorname{tang} \varphi}{1 - \operatorname{tang}^2 \varphi} = \frac{4}{3}$$

ist; so ist

$$\operatorname{tang}(2\varphi - \psi) = \frac{\operatorname{tang} 2\varphi - \operatorname{tang} \psi}{1 + \operatorname{tang} 2\varphi \operatorname{tang} \psi} = \frac{\frac{4}{3} - \frac{1}{7}}{1 + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{7}} = 1,$$

und folglich

$$2\varphi - \psi = \frac{1}{4}\pi,$$

d. i.

$$2\operatorname{Arctang} \frac{1}{2} - \operatorname{Arctang} \frac{1}{7} = \frac{1}{4}\pi,$$

wie bewiesen werden sollte.

Ganz auf ähnliche Art kann man sich von der Richtigkeit der Gleichung

$$3. \quad 2\operatorname{Arctang} \frac{1}{3} + \operatorname{Arctang} \frac{1}{7} = \frac{1}{4}\pi$$

überzeugen.

Die Gleichung

$$4. \quad 4\operatorname{Arctang} \frac{1}{5} - \operatorname{Arctang} \frac{1}{239} = \frac{1}{4}\pi$$

kann auf folgende Art bewiesen werden.

Man setze

$$\operatorname{Arctang} \frac{1}{5} = \varphi, \operatorname{Arctang} \frac{1}{239} = \psi;$$

so ist

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{1}{5}, \operatorname{tang} \psi = \frac{1}{239}.$$

Bekanntlich ist nun

$$\operatorname{tang} 2\varphi = \frac{2\operatorname{tang} \varphi}{1 - \operatorname{tang}^2 \varphi} = \frac{2}{12},$$

$$\operatorname{tang} 4\varphi = \frac{2\operatorname{tang} 2\varphi}{1 - \operatorname{tang}^2 2\varphi} = \frac{120}{119}.$$

Folglich ist

$$\operatorname{tang}(4\varphi - \psi) = \frac{\operatorname{tang} 4\varphi - \operatorname{tang} \psi}{1 + \operatorname{tang} 4\varphi \operatorname{tang} \psi} = 1,$$

und daher

$$4\varphi - \psi = \frac{1}{4}\pi,$$

d. i.

$$4 \operatorname{Arctang} \frac{1}{5} - \operatorname{Arctang} \frac{1}{239} = \frac{1}{4}\pi,$$

wie bewiesen, werden sollte.

Aus der Gleichung 1. und §. 124. ergibt sich

$$\frac{1}{4}\pi = \begin{cases} \frac{1}{1.2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \frac{1}{9.2^9} - \dots \\ + \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \frac{1}{7.3^7} + \frac{1}{9.3^9} - \dots \end{cases}$$

Aus der Gleichung 3. und §. 124. ergibt sich

$$\frac{1}{4}\pi = \begin{cases} \frac{1}{1.7} - \frac{1}{3.7^3} + \frac{1}{5.7^5} - \frac{1}{7.7^7} + \frac{1}{9.7^9} - \dots \\ + 2\left(\frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \frac{1}{7.3^7} + \frac{1}{9.3^9} - \dots\right) \end{cases}$$

Aus der Gleichung 4. und §. 124. ergibt sich

$$\frac{1}{4}\pi = \begin{cases} 4\left(\frac{1}{1.5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + \frac{1}{9.5^9} - \dots\right) \\ - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \frac{1}{5.239^5} - \frac{1}{7.239^7} - \dots\right) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{4}{1.5} - \frac{1}{239} &= \frac{4}{1.5} - \frac{1}{239} \\ &- \left(\frac{4}{3.5^3} - \frac{1}{3.239^3}\right) &- \frac{1}{3} \left(\frac{8.4}{8.5^3} - \frac{1}{239.239^2}\right) \\ &+ \left(\frac{4}{5.5^5} - \frac{1}{5.239^5}\right) &+ \frac{1}{5} \left(\frac{8.4^2}{8.4.5^5} - \frac{1}{239.239^4}\right) \\ &- \left(\frac{4}{7.5^7} - \frac{1}{7.239^7}\right) &- \frac{1}{7} \left(\frac{8.4^3}{8.4^2.5^7} - \frac{1}{239.239^6}\right) \\ &+ \left(\frac{4}{9.5^9} - \frac{1}{9.239^9}\right) &+ \frac{1}{9} \left(\frac{8.4^4}{8.4^3.5^9} - \frac{1}{239.239^8}\right) \\ &- \dots &- \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{4}{1.5} - \frac{1}{239} \\ &- \frac{1}{3} \left(\frac{8.4}{1000} - \frac{1}{239.57121}\right) \\ &+ \frac{1}{5} \left(\frac{8.4^2}{100000} - \frac{1}{239.57121^2}\right) \\ &- \frac{1}{7} \left(\frac{8.4^3}{10000000} - \frac{1}{239.57121^3}\right) \\ &+ \frac{1}{9} \left(\frac{8.4^4}{1000000000} - \frac{1}{239.57121^4}\right) \\ &- \dots \end{aligned}$$

Diese Reihe ist ganz vorzüglich bequem zur Berechnung von π .

§. 126.

Mittelst der in §. 121. und §. 122. gefundenen Entwicklungen lässt sich leicht zeigen, dass die imaginäre Reihe

$$1, \frac{x\sqrt{-1}}{1}, \frac{(x\sqrt{-1})^2}{1.2}, \frac{(x\sqrt{-1})^3}{1.2.3}, \frac{(x\sqrt{-1})^4}{1.2.3.4}, \dots$$

für jedes x eine bestimmte Summe hat, und daher für jedes x convergirt.

Die Glieder dieser Reihe sind nämlich

$$1, \frac{x\sqrt{-1}}{1}, -\frac{x^2}{1.2}, -\frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3}, \frac{x^4}{1.2.3.4}, \frac{x^5\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5}, \dots$$

und ihre Summe ist folglich

$$1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \dots$$

$$+ \left\{ x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \dots \right\} \sqrt{-1},$$

d. i. nach §. 121. und §. 122. die Grösse

$$\cos x + \sin x \sqrt{-1}.$$

Weil nun die stets convergirende imaginäre Reihe

$$1, \frac{x\sqrt{-1}}{1}, \frac{(x\sqrt{-1})^2}{1.2}, \frac{(x\sqrt{-1})^3}{1.2.3}, \frac{(x\sqrt{-1})^4}{1.2.3.4}, \dots$$

aus der stets convergirenden reellen Reihe

$$1, \frac{x}{1}, \frac{x^2}{1.2}, \frac{x^3}{1.2.3}, \frac{x^4}{1.2.3.4}, \dots$$

deren Summe nach §. 118. bekanntlich e^x ist, erhalten wird, wenn man $x\sqrt{-1}$ für x setzt; so versteht man unter der Potenz $e^{x\sqrt{-1}}$ mit dem imaginären Exponenten $x\sqrt{-1}$ die Summe der stets convergirenden imaginären Reihe

$$1, \frac{x\sqrt{-1}}{1}, \frac{(x\sqrt{-1})^2}{1.2}, \frac{(x\sqrt{-1})^3}{1.2.3}, \frac{(x\sqrt{-1})^4}{1.2.3.4}, \dots$$

und setzt also

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sin x \sqrt{-1}.$$

Setzt man in dieser Gleichung, wie dies verstattet ist, $-x$ für x ; so erhält man

$$e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sin x \sqrt{-1},$$

und es ist folglich

$$e^{\pm x\sqrt{-1}} = \cos x \pm \sin x \sqrt{-1}.$$

Durch Addition und Subtraction der beiden Gleichungen

$$e^{+x\sqrt{-1}} = \cos x + \sin x \sqrt{-1},$$

$$e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sin x \sqrt{-1}$$

erhält man die merkwürdigen Formeln

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2},$$

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

und aus diesen Formeln folgt leicht durch Division

$$\tan x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}})\sqrt{-1}}, \quad \cot x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}\sqrt{-1};$$

oder

$$\tan x = \frac{e^{2x\sqrt{-1}} - 1}{(e^{2x\sqrt{-1}} + 1)\sqrt{-1}}, \quad \cot x = \frac{1 + e^{2x\sqrt{-1}}}{(1 - e^{2x\sqrt{-1}})\sqrt{-1}};$$

oder auch

$$\tan x = \frac{1 - e^{2x\sqrt{-1}}}{1 + e^{2x\sqrt{-1}}}\sqrt{-1}, \quad \cot x = \frac{e^{2x\sqrt{-1}} + 1}{e^{2x\sqrt{-1}} - 1}\sqrt{-1}.$$

§. 127.

Wir wollen nun noch die Grösse $l(\alpha + \beta\sqrt{-1})$ auf die Form $p + q\sqrt{-1}$, wo α, β, p, q reelle Grössen bezeichnen, zu bringen suchen.

Aus der Gleichung

$$l(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = p + q\sqrt{-1}$$

ergiebt sich unmittelbar die Gleichung

$$e^{p + q\sqrt{-1}} = \alpha + \beta\sqrt{-1}.$$

Nach §. 126. ist aber

$$e^{p + q\sqrt{-1}} = e^p (\cos q + \sin q \sqrt{-1}).$$

Also müssen die Grössen p und q so bestimmt werden, dass

$$e^p (\cos q + \sin q \sqrt{-1}) = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$

d. i. dass

$$e^p \cos q = \alpha, \quad e^p \sin q = \beta$$

ist. Aus diesen Gleichungen folgt aber, wenn man dieselben quadriert und dann zu einander addirt, auf der Stelle

$$e^{2p} = \alpha^2 + \beta^2;$$

folglich

$$2p = l(\alpha^2 + \beta^2), \quad p = \frac{1}{2}l(\alpha^2 + \beta^2).$$

Weil nun ferner

$$e^p = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

ist, wo die Quadratwurzel positiv zu nehmen ist, da e^p immer positiv ist; so muss q so bestimmt werden, dass zugleich

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cdot \cos q = \alpha, \quad \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cdot \sin q = \beta,$$

oder

$$\cos q = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad \sin q = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}},$$

oder dass zugleich

$$q = \text{Arc cos} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \text{Arc sin} \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

ist, welches, weil

$$\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right)^2 + \left(\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right)^2 = 1$$

ist, offenbar immer möglich ist. Uebrigens kann man auch q aus der Gleichung

$$q = \text{Arctang} \frac{\beta}{\alpha}$$

bestimmen, hat dann aber zu bemerken, dass sich q , wenn α und β beide positiv sind, im ersten; wenn α und β beide negativ sind, im dritten; wenn α positiv und β negativ ist, im vierten; wenn α negativ und β positiv ist, im zweiten Quadranten endigen muss, weil nur, wenn diese Bedingungen erfüllt sind, zugleich

$$q = \text{Arccos} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \text{Arcsin} \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

seyn kann, wie es erfordert wird.

Ist nun q gehörig bestimmt; so ergibt sich aus dem Obigen

$$l(\alpha + \beta \sqrt{-1}) = \frac{1}{2}l(\alpha^2 + \beta^2) + q \sqrt{-1},$$

und wenn man auf beiden Seiten mit dem Modulus der durch $\log$ bezeichneten Logarithmen multiplicirt,

$$\log(\alpha + \beta \sqrt{-1}) = \frac{1}{2} \log(\alpha^2 + \beta^2) + Mq \sqrt{-1}.$$

Da q offenbar unendlich viele verschiedene Werthe haben kann; so hat auch $\log(\alpha + \beta \sqrt{-1})$ jederzeit unendlich viele verschiedene Werthe.

Für $\alpha = +1$ und $\beta = 0$ muss q so bestimmt werden, dass

$$q = \text{Arc cos}(+1) = \text{Arc sin } 0$$

ist. Dies giebt

$$q = 2k\pi,$$

wo k jede positive oder negative ganze Zahl seyn kann.

Für $\alpha = -1$ und $\beta = 0$ muss q so bestimmt werden, dass

$$q = \text{Arc cos}(-1) = \text{Arc sin } 0$$

ist. Dies giebt

$$q = (2k + 1)\pi,$$

wo k wieder jede positive oder negative ganze Zahl seyn kann.

Dies vorausgesetzt, erhält man aus der Gleichung

$$\log(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}\log(\alpha^2 + \beta^2) + Mq\sqrt{-1}$$

auf der Stelle

$$\log(+1) = 2kM\pi\sqrt{-1}$$

und

$$\log(-1) = (2k + 1)M\pi\sqrt{-1},$$

für jedes positive oder negative k , wobei man nur zu bemerken hat, dass man in obiger Gleichung für die Grösse $\log(\alpha^2 + \beta^2)$ immer ihren reellen Werth zu setzen hat, welcher für $\alpha = \pm 1$ und $\beta = 0$ bekanntlich $= 0$ ist.

Ueberhaupt erhält man aus obiger Gleichung für $\beta = 0$

$$\log \alpha = \frac{1}{2}\log(\alpha^2) + Mq\sqrt{-1},$$

wo $\log(\alpha^2)$ den reellen Werth bezeichnet, welchen dieser Logarithmus, weil α^2 positiv ist, jederzeit nothwendig haben muss. Auch wird leicht erhellen, dass in diesem Falle

$$q = \text{Arc cos}(\pm 1) = \text{Arc sin } 0$$

und das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, jenachdem α positiv oder negativ ist, welches daher kommt, weil in der allgemeinen Gleichung

$$q = \text{Arc cos} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \text{Arc sin} \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

die Quadratwurzel in den Nennern jederzeit positiv zu nehmen ist.

Ist also α positiv, so ist $q = 2k\pi$; ist dagegen α negativ, so ist $q = (2k + 1)\pi$, wo k immer eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet.

Ist folglich α positiv, so ist

$$\log \alpha = \frac{1}{2}\log(\alpha^2) + 2kM\pi\sqrt{-1};$$

dagegen ist, wenn α negativ ist,

$$\log \alpha = \frac{1}{2}\log(\alpha^2) + (2k + 1)M\pi\sqrt{-1}.$$

Hieraus sieht man, dass der Logarithmus jeder reellen Grösse unendlich viele verschiedene Werthe hat. Ist die in Rede stehende reelle Grösse negativ, so sind alle diese Werthe ihres Logarithmus imaginär, dagegen findet sich unter den unendlich

vielen verschiedenen Werthen des Logarithmus einer positiven Grösse jederzeit ein reeller Werth, welchen man erhält, wenn man in der Gleichung

$$\log \alpha = \frac{1}{2} \log (\alpha^2) + 2k M \pi \sqrt{-1}$$

$k = 0$ setzt.

Ist β nicht $= 0$; so kann wegen

$$q = \text{Arc cos} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \text{Arc sin} \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

offenbar nie $q = 0$ seyn, und aus der Gleichung

$$\log (\alpha + \beta \sqrt{-1}) = \frac{1}{2} \log (\alpha^2 + \beta^2) + M q \sqrt{-1}$$

geht also hervor, dass die unendlich vielen verschiedenen Werthe, welche der Logarithmus einer jeden imaginären Grösse hat, jederzeit sämmtlich imaginär sind.

Siebentes Kapitel.

Von der Differentiation der Functionen mit mehrern von einander unabhängigen veränderlichen Grössen.

§. 128.

Wenn man bloss eine veränderliche Grösse einer beliebigen Function

$$u = f(x, y, z, v, \dots)$$

der von einander völlig unabhängigen veränderlichen Grössen $x, y, z, v, \dots$ als veränderlich, alle übrigen in der Function vorkommenden veränderlichen Grössen dagegen als constant betrachtet, und unter dieser Voraussetzung das n te Differential der Function nach den aus dem Vorhergehenden bekannten Regeln entwickelt; so heisst dieses Differential das n te partielle Differential der gegebenen Function in Bezug auf die als veränderlich betrachtete Grösse.

Im Folgenden sollen die in Bezug auf $x, y, z, v, \dots$ als veränderliche Grösse genommenen n ten partiellen Differentiale der Function u respective durch

$$\partial_x^n u, \partial_y^n u, \partial_z^n u, \partial_v^n u, \dots$$

die ersten partiellen Differentiale in Bezug auf dieselben veränderlichen Grössen wie gewöhnlich mit Weglassung des Exponenten 1 bloss durch

$$\partial_x u, \partial_y u, \partial_z u, \partial_v u, \dots$$

bezeichnet werden.

Die n ten partiellen Differentialquotienten der Function u in Bezug auf $x, y, z, v, \dots$ als veränderliche Grösse erhält man, wenn man die n ten partiellen Differentiale nach der Reihe durch

$$\partial x^n, \partial y^n, \partial z^n, \partial v^n, \dots,$$

d. i., wobei §. 36. zu vergleichen, eigentlich durch

$$\Delta x^n, \Delta y^n, \Delta z^n, \Delta v^n, \dots,$$

wo $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta v, \dots$ wie immer ganz beliebige, stets als constant zu betrachtende Veränderungen der unabhängigen veränderlichen Grössen $x, y, z, v, \dots$ bezeichnen, dividirt. Daher würden die n ten partiellen Differentialquotienten der Function u in Bezug auf $x, y, z, v, \dots$ als veränderliche Grösse eigentlich respective durch

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n}, \frac{\partial^n u}{\partial y^n}, \frac{\partial^n u}{\partial z^n}, \frac{\partial^n u}{\partial v^n}, \dots,$$

die ersten partiellen Differentialquotienten in Bezug auf dieselben veränderlichen Grössen durch

$$\frac{\partial x u}{\partial x}, \frac{\partial y u}{\partial y}, \frac{\partial z u}{\partial z}, \frac{\partial v u}{\partial v}, \dots$$

zu bezeichnen seyn. In den meisten Fällen können aber statt dieser etwas weitläufigen Bezeichnung ohne alle Zweideutigkeit die einfachern Symbole

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n}, \frac{\partial^n u}{\partial y^n}, \frac{\partial^n u}{\partial z^n}, \frac{\partial^n u}{\partial v^n}, \dots$$

und

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial v}, \dots$$

gebraucht werden, weil schon die Nenner dieser Brüche mit hinreichender Deutlichkeit und Bestimmtheit anzeigen, dass bloss die in denselben enthaltenen veränderlichen Grössen bei der Differentiation als veränderlich betrachtet werden sollen.

Euler bezeichnet in seinen Schriften die partiellen Differentialquotienten durch

$$\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right), \left(\frac{\partial^n u}{\partial y^n}\right), \left(\frac{\partial^n u}{\partial z^n}\right), \left(\frac{\partial^n u}{\partial v^n}\right), \dots$$

und

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right), \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right), \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right), \dots,$$

eine Bezeichnung, die wir im Folgenden, wenn es die Deutlichkeit fordert, auch zuweilen gebrauchen werden. Will man sich des Functionszeichens f bedienen; so werden die n ten partiellen Differentialquotienten der Function

$$u = f(x, y, z, v, \dots)$$

in Bezug auf $x, y, z, v, \dots$ durch

$$f_x^{(n)}(x, y, z, v, \dots),$$

$$f_y^{(n)}(x, y, z, v, \dots),$$

$$f_z^{(n)}(x, y, z, v, \dots),$$

$$f_v^{(n)}(x, y, z, v, \dots),$$

u. s. w.

die n ten partiellen Differentiale in Bezug auf dieselben veränderlichen Grössen also durch

$$f_x^{(n)}(x, y, z, v, \dots) \cdot \partial x^n,$$

$$f_y^{(n)}(x, y, z, v, \dots) \cdot \partial y^n,$$

$$f_z^{(n)}(x, y, z, v, \dots) \cdot \partial z^n,$$

$$f_v^{(n)}(x, y, z, v, \dots) \cdot \partial v^n,$$

u. s. w.

bezeichnet.

Um die obigen allgemeinen Begriffe an ein Paar Beispielen zu erläutern; so sey zuerst

$$u = \frac{x^2y - 3xy^2}{2x + y}.$$

Betrachtet man nun bloss x als veränderlich, und entwickelt unter dieser Voraussetzung den Differentialquotienten von u ; so erhält man

$$\frac{\partial_x u}{\partial x} = \frac{(2x + y)(2xy - 3y^2) - 2(x^2y - 3xy^2)}{(2x + y)^2}$$

$$= \frac{2xy(x + y) - 3y^3}{(2x + y)^2}.$$

Betrachtet man aber bloss y als veränderlich und entwickelt den Differentialquotienten; so erhält man

$$\frac{\partial_y u}{\partial y} = \frac{(2x + y)(x^2 - 6xy) - x^2y + 3xy^2}{(2x + y)^2}$$

$$= \frac{2x^3 - 3xy(4x + y)}{(2x + y)^2}.$$

Folglich ist

$$\partial_x u = \frac{2xy(x + y) - 3y^3}{(2x + y)^2} \partial x,$$

$$\partial_y u = \frac{2x^3 - 3xy(4x + y)}{(2x + y)^2} \partial y.$$

Ist ferner

$$u = \text{Arc tang } \frac{x}{y};$$

so setze man

$$\frac{x}{y} = p.$$

Dann ist nach §. 43.

$$\frac{\partial_x u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial p} \cdot \frac{\partial_x p}{\partial x}, \quad \frac{\partial_y u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial p} \cdot \frac{\partial_y p}{\partial y};$$

also

$$\frac{\partial_x u}{\partial x} = \frac{1}{1+p^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial_y u}{\partial y} = -\frac{1}{1+p^2} \cdot \frac{x}{y^2} = -\frac{x}{x^2+y^2},$$

und folglich

$$\partial_x u = \frac{y}{x^2+y^2} \partial x, \quad \partial_y u = -\frac{x}{x^2+y^2} \partial y.$$

§. 129.

Vorzüglich kommt es nun darauf an, recht deutlich zu entwickeln, was man unter dem vollständigen Differential einer Function mit mehrern von einander unabhängigen veränderlichen Grössen zu verstehen hat.

Die gegebene Function sey

$$u = f(x, y, z, v, \dots s, t)$$

und $x, y, z, v, \dots s, t$ seyen beliebige von einander ganz unabhängige veränderliche Grössen. Ferner seyen $\partial x, \partial y, \partial z, \partial v, \dots \partial s, \partial t$ beliebige constante Grössen, und α sey eine beliebige als veränderlich zu betrachtende Grösse. Lässt man nun die Grössen $x, y, z, v, \dots s, t$ sich respective um $\alpha \partial x, \alpha \partial y, \alpha \partial z, \alpha \partial v, \dots \alpha \partial s, \alpha \partial t$ verändern; so geht die gegebene Function in

$$f(x + \alpha \partial x, y + \alpha \partial y, z + \alpha \partial z, \dots t + \alpha \partial t)$$

über, und man kann nun diese Grösse offenbar als eine Function von α betrachten, die wir durch $F(\alpha)$ bezeichnen wollen, so dass also

$$F(\alpha) = f(x + \alpha \partial x, y + \alpha \partial y, z + \alpha \partial z, \dots t + \alpha \partial t),$$

folglich

$$F(0) = f(x, y, z, v, \dots s, t)$$

ist.

Dies vorausgesetzt, versteht man unter dem vollständigen Differential der Function u die Grösze, welcher sich der Bruch

$$\frac{F(\alpha) - F(0)}{\alpha}$$

bis zu jedem beliebigen Grade nähert, wenn, indem die Grössen $x, y, z, v, \dots s, t; \partial x, \partial y, \partial z, \partial v, \dots \partial s, \partial t$ völlig ungeändert bleiben, die Grösse α sich der Null nähert, in so fern es nämlich überhaupt eine solche Gränze giebt. Bezeichnen wir also diese Gränze durch

$$\text{Lim} \frac{F(\alpha) - F(0)}{\alpha},$$

das vollständige Differential der Function u aber, wie im Folgenden immer geschehen soll, durch ∂u ; so ist nach dem obigen allgemeinen Begriffe

$$\partial u = \text{Lim} \frac{F(\alpha) - F(0)}{\alpha}.$$

Erwägt man übrigens, dass die Grösse $F(\alpha) - F(0)$ offenbar die durch die Veränderungen $\alpha \partial x, \alpha \partial y, \alpha \partial z, \alpha \partial v, \dots \alpha \partial s, \alpha \partial t$ der unabhängigen veränderlichen Grössen $x, y, z, v, \dots s, t$ herbeigeführte Veränderung der Function u ist; so ist klar, dass, wenn man diese Veränderung durch Δu bezeichnet, die obige Gleichung auch unter der einfachen Form

$$\partial u = \text{Lim} \frac{\Delta u}{\alpha}$$

dargestellt werden kann, immer unter der Voraussetzung, dass α sich der Null nähert.

Betrachtet man, die Grössen $\partial x, \partial y, \partial z, \partial v, \dots \partial s, \partial t$ immer als constant ansehend, ∂u als eine neue Function von $x, y, z, v, \dots s, t$, und nimmt von derselben nach dem obigen allgemeinen Begriffe das vollständige Differential; so erhält man das zweite vollständige Differential $\partial^2 u$ der Function u , und es ist folglich immer

$$\partial^2 u = \partial \partial u.$$

Betrachtet man nun wieder, $\partial x, \partial y, \partial z, \partial v, \dots \partial s, \partial t$ immer als constant ansehend, $\partial^2 u$ als eine Function von $x, y, z, v, \dots s, t$ und nimmt von derselben nach dem obigen allgemeinen Begriffe das vollständige Differential; so erhält man das dritte vollständige Differential $\partial^3 u$ von u , und es ist folglich immer

$$\partial^3 u = \partial \partial^2 u.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar. Ueberhaupt ist, wenn $\partial^{n-1} u$ und $\partial^n u$ das $(n-1)$ ste und n te vollständige Differential der Function u bezeichnen,

$$\partial^n u = \partial \partial^{n-1} u,$$

wobei man nur nie aus den Augen verlieren darf, dass bei der Differentiation jederzeit $\partial x, \partial y, \partial z, \partial v, \dots \partial s, \partial t$ als constante Grössen zu betrachten sind.

Der folgende Lehrsatz ist für die Entwicklung der vollständigen Differentiale der Functionen mit mehrern von ein-

ander unabhängigen veränderlichen Grössen von der grössten Wichtigkeit.

§. 130.

Lehrsatz. Wenn

$$u = f(x, y, z, v, \dots s, t)$$

eine beliebige Function der von einander unabhängigen veränderlichen Grössen $x, y, z, v, \dots s, t$ ist; so ist immer

$$\partial u = \partial_x u + \partial_y u + \partial_z u + \partial_v u + \dots + \partial_t u,$$

d. h. das vollständige Differential der Function u ist immer der Summe aller ihrer partiellen Differentiale in Bezug auf jede ihrer veränderlichen Grössen einzeln genommen gleich.

Beweis. Die Anzahl der von einander unabhängigen veränderlichen Grössen $x, y, z, v, \dots s, t$ sey n . Bezeichnen dann $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4, \dots \varrho_{n-1}, \varrho_n$ gewisse positive echte Brüche; so ist nach §. 110. II., wenn wir die Functionen

$$f(x, y, z, v, \dots s, t),$$

$$f(x + \alpha \partial x, y, z, v, \dots s, t)$$

$$f(x + \alpha \partial x, y + \alpha \partial y, z, v, \dots s, t)$$

$$f(x + \alpha \partial x, y + \alpha \partial y, z + \alpha \partial z, v, \dots s, t)$$

u. s. w.

u. s. w.

$$f(x + \alpha \partial x, y + \alpha \partial y, z + \alpha \partial z, v + \alpha \partial v, \dots t + \alpha \partial t)$$

der Kürze wegen respective durch $u, u_1, u_2, u_3, \dots u_n$ bezeichnen,

$$u_1 - u = f'_x(x + \varrho_1 \alpha \partial x, y, z, v, \dots s, t) \cdot \alpha \partial x,$$

$$u_2 - u_1 = f'_y(x + \alpha \partial x, y + \varrho_2 \alpha \partial y, z, v, \dots s, t) \cdot \alpha \partial y,$$

$$u_3 - u_2 = f'_z(x + \alpha \partial x, y + \alpha \partial y, z + \varrho_3 \alpha \partial z, v, \dots s, t) \cdot \alpha \partial z,$$

u. s. w.

u. s. w.

$$u_n - u_{n-1} = f'_t(x + \alpha \partial x, y + \alpha \partial y, z + \alpha \partial z, \dots s + \alpha \partial s, t + \varrho_n \alpha \partial t) \cdot \alpha \partial t,$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten der Gleichheitszeichen addirt, zugleich aber erwägt, dass in der in §. 129. gebrauchten Bezeichnung

$$u_n = F(\alpha), \quad u = F(0)$$

ist,

$$\frac{F(\alpha) - F(0)}{\alpha}$$

$$\alpha$$

$$= f'_x(x + \varrho_1 \alpha \partial x, y, z, v, \dots s, t) \cdot \partial x$$

$$+ f'_y(x + \alpha \partial x, y + \varrho_2 \alpha \partial y, z, v, \dots s, t) \cdot \partial y$$

$$+ f'_z(x + \alpha \partial x, y + \alpha \partial y, z + \varrho_3 \alpha \partial z, v, \dots s, t) \cdot \partial z$$

$$+ f'_t(x + \alpha \partial x, y + \alpha \partial y, z + \alpha \partial z, \dots s + \alpha \partial s, t + \varrho_n \alpha \partial t) \cdot \partial t.$$

Lässt man nun α sich der Null nähern; so nähern, weil $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4, \dots, \varrho_{n-1}, \varrho_n$ positive echte Brüche sind, die Grössen

$$f'_x(x + \varrho_1 \alpha \partial x, y, z, \dots, s, t),$$

$$f'_y(x + \alpha \partial x, y + \varrho_2 \alpha \partial y, z, v, \dots, s, t),$$

$$f'_z(x + \alpha \partial x, y + \alpha \partial y, z + \varrho_3 \alpha \partial z, v, \dots, s, t),$$

u. s. w.

$$f'_t(x + \alpha \partial x, y + \alpha \partial y, z + \alpha \partial z, \dots, s + \alpha \partial s, t + \varrho_n \alpha \partial t)$$

sich offenbar respective den Grössen

$$f'_x(x, y, z, v, \dots, s, t),$$

$$f'_y(x, y, z, v, \dots, s, t),$$

$$f'_z(x, y, z, v, \dots, s, t),$$

u. s. w.

$$f'_t(x, y, z, v, \dots, s, t)$$

als ihren Gränzen immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade, und es ist folglich

$$\lim \frac{F(\alpha) - F(0)}{\alpha} = f'_x(x, y, z, v, \dots, s, t) \cdot \partial x$$

$$+ f'_y(x, y, z, v, \dots, s, t) \cdot \partial y$$

$$+ f'_z(x, y, z, v, \dots, s, t) \cdot \partial z$$

$$\dots$$

$$+ f'_t(x, y, z, v, \dots, s, t) \cdot \partial t.$$

Nach §. 129. ist aber

$$\lim \frac{F(\alpha) - F(0)}{\alpha} = \partial u.$$

Also ist

$$\partial u = f'_x(x, y, z, v, \dots, s, t) \cdot \partial x$$

$$+ f'_y(x, y, z, v, \dots, s, t) \cdot \partial y$$

$$+ f'_z(x, y, z, v, \dots, s, t) \cdot \partial z$$

$$\dots$$

$$+ f'_t(x, y, z, v, \dots, s, t) \cdot \partial t,$$

d. i.

$$\partial u = \frac{\partial^x u}{\partial x} \partial x + \frac{\partial^y u}{\partial y} \partial y + \frac{\partial^z u}{\partial z} \partial z + \dots + \frac{\partial^t u}{\partial t} \partial t;$$

folglich

$$\partial u = \partial_x u + \partial_y u + \partial_z u + \partial_v u + \dots + \partial_t u,$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 131.

Mittelst des vorhergehenden wichtigen Theorems lassen sich die vollständigen Differentiale aller Ordnungen jeder Function mit

einer beliebigen Anzahl von einander unabhängiger veränderlicher Grössen ohne Schwierigkeit entwickeln.

Für

$$u = \frac{x^2 y - 3xy^2}{2x + y}$$

ist nach §. 128.

$$\partial_x u = \frac{2xy(x+y) - 3y^3}{(2x+y)^2} \partial x, \quad \partial_y u = \frac{2x^3 - 3xy(4x+y)}{(2x+y)^2} \partial y;$$

also ist nach §. 130.

$$\partial u = \frac{2xy(x+y) - 3y^3}{(2x+y)^2} \partial x + \frac{2x^3 - 3xy(4x+y)}{(2x+y)^2} \partial y.$$

Für

$$u = \text{Arc tang} \frac{x}{y}$$

ist nach §. 128.

$$\partial_x u = \frac{y}{x^2 + y^2} \partial x, \quad \partial_y u = -\frac{x}{x^2 + y^2} \partial y;$$

also ist nach §. 130.

$$\partial u = \frac{y}{x^2 + y^2} \partial x - \frac{x}{x^2 + y^2} \partial y.$$

Die höhern vollständigen Differentiale erhält man ganz nach demselben Verfahren, hat aber dabei nur nie aus den Augen zu verlieren, dass ∂x , ∂y , ∂z , ∂v , . . . immer als constant zu betrachten sind.

Für $u = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y}$ erhält man z. B.

$$\partial^3 u = + \frac{3y^{\frac{1}{3}} \partial x^3}{8x^{\frac{5}{3}}} - \frac{\partial x^2 \partial y}{4x^{\frac{3}{2}} y^{\frac{2}{3}}} - \frac{\partial x \partial y^2}{3x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{5}{3}}} + \frac{10x^{\frac{1}{2}} \partial y^3}{27y^{\frac{8}{3}}}.$$

§. 132.

Die Symbole P , Q , R , . . . T , V sollen jetzt immer Functionen der von einander unabhängigen veränderlichen Grössen x , y , z , v , . . . s , t bezeichnen.

I. Ist nun, indem a eine constante Grösse bezeichnet,

$$u = aP;$$

so ist nach §. 37.

$$\partial_x u = a \partial_x P, \quad \partial_y u = a \partial_y P, \quad \partial_z u = a \partial_z P, \quad \dots \quad \partial_t u = a \partial_t P,$$

und folglich

$$\begin{aligned} & \partial_x u + \partial_y u + \partial_z u + \dots + \partial_t u \\ &= a(\partial_x P + \partial_y P + \partial_z P + \dots + \partial_t P). \end{aligned}$$

Nach §. 130. ist aber

$$\begin{aligned}\partial u &= \partial_x u + \partial_y u + \partial_z u + \dots + \partial_t u, \\ \partial P &= \partial_x P + \partial_y P + \partial_z P + \dots + \partial_t P.\end{aligned}$$

Also ist

$$\partial u = a \partial P.$$

II. Wenn ferner, indem a wieder eine constante Grösse bezeichnet,

$$u = a \pm P \pm Q \pm R \pm \dots \pm V$$

ist; so ist nach §. 38.

$$\begin{aligned}\partial_x u &= \pm \partial_x P \pm \partial_x Q \pm \partial_x R \pm \dots \pm \partial_x V, \\ \partial_y u &= \pm \partial_y P \pm \partial_y Q \pm \partial_y R \pm \dots \pm \partial_y V, \\ \partial_z u &= \pm \partial_z P \pm \partial_z Q \pm \partial_z R \pm \dots \pm \partial_z V, \\ &\text{u. s. w.}\end{aligned}$$

$$\partial_t u = \pm \partial_t P \pm \partial_t Q \pm \partial_t R \pm \dots \pm \partial_t V,$$

und folglich

$$\begin{aligned}&\partial_x u + \partial_y u + \partial_z u + \dots + \partial_t u \\ &= \pm (\partial_x P + \partial_y P + \partial_z P + \dots + \partial_t P) \\ &\quad \pm (\partial_x Q + \partial_y Q + \partial_z Q + \dots + \partial_t Q) \\ &\quad \pm (\partial_x R + \partial_y R + \partial_z R + \dots + \partial_t R) \\ &\quad \dots \dots \dots \\ &\quad \pm (\partial_x V + \partial_y V + \partial_z V + \dots + \partial_t V),\end{aligned}$$

d. i. nach §. 130.

$$\partial u = \pm \partial P \pm \partial Q \pm \partial R \pm \dots \pm \partial V.$$

III. Sey jetzt $u = PQ$; so ist nach §. 40.

$$\begin{aligned}\partial_x u &= P \partial_x Q + Q \partial_x P, \\ \partial_y u &= P \partial_y Q + Q \partial_y P, \\ \partial_z u &= P \partial_z Q + Q \partial_z P, \\ &\text{u. s. w.}\end{aligned}$$

$$\partial_t u = P \partial_t Q + Q \partial_t P,$$

und folglich

$$\begin{aligned}&\partial_x u + \partial_y u + \partial_z u + \dots + \partial_t u \\ &= P(\partial_x Q + \partial_y Q + \partial_z Q + \dots + \partial_t Q) \\ &\quad + Q(\partial_x P + \partial_y P + \partial_z P + \dots + \partial_t P),\end{aligned}$$

d. i. nach §. 130.

$$\partial u = P \partial Q + Q \partial P$$

oder

$$\frac{\partial u}{u} = \frac{\partial P}{P} + \frac{\partial Q}{Q}.$$

IV. Für $u = PQR$ ergibt sich hieraus leicht

$$\frac{\partial u}{u} = \frac{\partial P}{P} + \frac{\partial Q}{Q} + \frac{\partial R}{R},$$

und für $u = PQRS$ folgt hieraus ferner

$$\frac{\partial u}{u} = \frac{\partial P}{P} + \frac{\partial Q}{Q} + \frac{\partial R}{R} + \frac{\partial S}{S}.$$

Auch ist klar, wie man auf diese Art immer weiter gehen kann.

V. Für $u = \frac{P}{Q}$ ist nach §. 42.

$$\partial_x u = \frac{Q \partial_x P - P \partial_x Q}{Q^2},$$

$$\partial_y u = \frac{Q \partial_y P - P \partial_y Q}{Q^2},$$

$$\partial_z u = \frac{Q \partial_z P - P \partial_z Q}{Q^2},$$

u. s. w.

$$\partial_t u = \frac{Q \partial_t P - P \partial_t Q}{Q^2},$$

und folglich

$$\begin{aligned} & \partial_x u + \partial_y u + \partial_z u + \dots + \partial_t u \\ &= \frac{Q(\partial_x P + \partial_y P + \dots + \partial_t P) - P(\partial_x Q + \partial_y Q + \dots + \partial_t Q)}{Q^2}, \end{aligned}$$

d. i. nach §. 130.

$$\partial u = \frac{Q \partial P - P \partial Q}{Q^2}.$$

VI. Wir wollen jetzt annehmen, dass, indem n eine constante Grösse bezeichnet,

$$u = P^n,$$

und dass in den Fällen, wo n ein in den kleinsten Zahlen ausgedrückter Bruch mit einem geraden Nenner ist, P positiv sey; so ist nach §. 45.

$$\partial_x u = n P^{n-1} \partial_x P,$$

$$\partial_y u = n P^{n-1} \partial_y P,$$

$$\partial_z u = n P^{n-1} \partial_z P,$$

u. s. w.

$$\partial_t u = n P^{n-1} \partial_t P,$$

wo in allen den Fällen, wo n ein Bruch mit einem geraden Nenner ist, P^{n-1} mit demselben Vorzeichen zu nehmen ist, mit dem man P^n genommen hat.

Also ist

$$\begin{aligned} & \partial_x u + \partial_y u + \partial_z u + \dots + \partial_t u \\ &= n P^{n-1} (\partial_x P + \partial_y P + \partial_z P + \dots + \partial_t P), \end{aligned}$$

d. i. nach §. 130.

$$\partial u = n P^{n-1} \partial P.$$

VII. Wenn $u = e^P$, ist; so ist

$$\partial_x u = e^P \partial_x P, \partial_y u = e^P \partial_y P, \dots \partial_t u = e^P \partial_t P,$$

und folglich

$$\begin{aligned} & \partial_x u + \partial_y u + \partial_z u + \dots + \partial_t u \\ &= e^P (\partial_x P + \partial_y P + \partial_z P + \dots + \partial_t P), \end{aligned}$$

d. i. nach §. 130.

$$\partial u = e^P \partial P.$$

VIII. Wenn $u = lP$ und P positiv ist, so ist

$$\partial_x u = \frac{\partial_x P}{P}, \partial_y u = \frac{\partial_y P}{P}, \partial_z u = \frac{\partial_z P}{P}, \dots \partial_t u = \frac{\partial_t P}{P},$$

und folglich

$$\begin{aligned} & \partial_x u + \partial_y u + \partial_z u + \dots + \partial_t u \\ &= \frac{\partial_x P + \partial_y P + \partial_z P + \dots + \partial_t P}{P}, \end{aligned}$$

d. i. nach §. 130.

$$\partial u = \frac{\partial P}{P}.$$

IX. Für $u = \sin P$ ist

$$\partial_x u = \cos P \partial_x P,$$

$$\partial_y u = \cos P \partial_y P,$$

$$\partial_z u = \cos P \partial_z P,$$

u. s. w.

$$\partial_t u = \cos P \partial_t P,$$

und folglich

$$\begin{aligned} & \partial_x u + \partial_y u + \partial_z u + \dots + \partial_t u \\ &= \cos P (\partial_x P + \partial_y P + \partial_z P + \dots + \partial_t P), \end{aligned}$$

d. i. nach §. 130.

$$\partial u = \cos P \partial P.$$

X. Für $u = \cos P$ ist

$$\partial_x u = -\sin P \partial_x P,$$

$$\partial_y u = -\sin P \partial_y P,$$

$$\partial_z u = -\sin P \partial_z P,$$

u. s. w.

$$\partial_t u = -\sin P \partial_t P,$$

und folglich

$$\begin{aligned} & \partial_x u + \partial_y u + \partial_z u + \dots + \partial_t u \\ &= -\sin P (\partial_x P + \partial_y P + \partial_z P + \dots + \partial_t P), \end{aligned}$$

d. i. nach §. 130.

$$\partial u = -\sin P \partial P.$$

XI. Für $u = \text{Arctang } P$ ist

$$\partial_x u = \frac{\partial_x P}{1 + P^2}, \partial_y u = \frac{\partial_y P}{1 + P^2}, \dots \partial_t u = \frac{\partial_t P}{1 + P^2},$$

und folglich

$$\begin{aligned} & \partial_x u + \partial_y u + \partial_z u + \dots + \partial_t u \\ &= \frac{\partial_x P + \partial_y P + \partial_z P + \dots + \partial_t P}{1 + P^2}, \end{aligned}$$

d. i. nach §. 130.

$$\partial u = \frac{\partial P}{1 + P^2}.$$

XII. Für $u = \text{Arc cot } P$ ist eben so

$$\partial_x u = -\frac{\partial_x P}{1 + P^2}, \partial_y u = -\frac{\partial_y P}{1 + P^2}, \dots \partial_t u = -\frac{\partial_t P}{1 + P^2},$$

und folglich

$$\begin{aligned} & \partial_x u + \partial_y u + \partial_z u + \dots + \partial_t u \\ &= -\frac{\partial_x P + \partial_y P + \partial_z P + \dots + \partial_t P}{1 + P^2}, \end{aligned}$$

d. i. nach §. 130.

$$\partial u = -\frac{\partial P}{1 + P^2}.$$

Die obigen Bemerkungen würden sich leicht vervielfältigen lassen.

§. 133.

Lehrsatz. Wenn

$$u = f(x, y)$$

eine Function der beiden veränderlichen Grössen x, y ist, oder wenigstens als eine bloss von diesen beiden veränderlichen Grössen abhängende Function betrachtet wird; so ist jederzeit

$$\partial_x \partial_y u = \partial_y \partial_x u.$$

Beweis. Die Veränderung, welche die Function u erleidet, wenn, indem y ungeändert bleibt, bloss x sich um Δx ändert, bezeichne man durch $\Delta_x u$; so ist

$$1. \quad \Delta_x u = f(x + \Delta x, y) - f(x, y),$$

und folglich, wenn man bloss in Bezug auf y als veränderliche Grösse differentiirt,

$$2. \quad \partial_y \Delta_x u = \partial_y f(x + \Delta x, y) - \partial_y f(x, y).$$

Setzen wir nun

$$3. \quad \partial_y f(x, y) = \varphi(x, y) \cdot \partial y;$$

so ist, weil diese Gleichung für jedes x gilt,

4. $\partial_y f(x + \Delta x, y) = \varphi(x + \Delta x, y) \cdot \partial y$,
und folglich nach 2.

$$5. \partial_y \Delta x u = \varphi(x + \Delta x, y) \cdot \partial y - \varphi(x, y) \cdot \partial y.$$

Aus der Gleichung 3., die man auch kürzer

$$6. \partial_y u = \varphi(x, y) \cdot \partial y$$

schreiben kann, folgt, wenn man x in $x + \Delta x$ übergehen lässt, auf der Stelle

$$7. \Delta x \partial_y u = \varphi(x + \Delta x, y) \cdot \partial y - \varphi(x, y) \cdot \partial y.$$

Folglich ist nach 5. und 7.

$$8. \Delta x \partial_y u = \partial_y \Delta x u;$$

also auch

$$9. \frac{\Delta x \partial_y u}{\Delta x} = \frac{\partial_y \Delta x u}{\Delta x},$$

oder

$$10. \frac{\Delta x \partial_y u}{\Delta x} = \partial_y \left(\frac{\Delta x u}{\Delta x} \right).$$

Da diese Gleichung für jedes Δx gilt; so gilt dieselbe offenbar auch für die Gränzen, denen

$$\frac{\Delta x \partial_y u}{\Delta x} \text{ und } \frac{\Delta x u}{\Delta x}$$

sich nähern, wenn Δx sich der Null nähert, und es ist folglich

$$11. \lim \frac{\Delta x \partial_y u}{\Delta x} = \partial_y \lim \frac{\Delta x u}{\Delta x}.$$

Nach dem allgemeinen Begriffe des Differentialquotienten ist aber

$$12. \lim \frac{\Delta x \partial_y u}{\Delta x} = \frac{\partial_x \partial_y u}{\partial x}, \quad \lim \frac{\Delta x u}{\Delta x} = \frac{\partial_x u}{\partial x}.$$

Also ist

$$13. \frac{\partial_x \partial_y u}{\partial x} = \partial_y \left(\frac{\partial_x u}{\partial x} \right)$$

und folglich auch

$$14. \frac{\partial_x \partial_y u}{\partial x} \partial x = \partial_y \left(\frac{\partial_x u}{\partial x} \right) \cdot \partial x.$$

Nach dem Begriffe des Differentials ist aber

$$15. \partial_x \partial_y u = \frac{\partial_x \partial_y u}{\partial x} \partial x,$$

und ferner ist, weil ∂x eine constante Grösse ist,

$$16. \partial_y \left(\frac{\partial_x u}{\partial x} \right) \cdot \partial x = \partial_y \left(\frac{\partial_x u}{\partial x} \partial x \right) = \partial_y \partial_x u.$$

Also ist nach 14.

$$17. \partial_x \partial_y u = \partial_y \partial_x u,$$

wie bewiesen werden sollte.

Für die Function

$$u = \text{Arc tang} \frac{x}{y}$$

ist z. B. nach §. 128.

$$\partial_y u = - \frac{x}{x^2 + y^2} \partial y, \quad \partial_x u = \frac{y}{x^2 + y^2} \partial x.$$

Hieraus erhält man ferner

$$\partial_x \partial_y u = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \partial x \partial y, \quad \partial_y \partial_x u = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \partial x \partial y,$$

so dass also wirklich in diesem Falle

$$\partial_x \partial_y u = \partial_y \partial_x u$$

ist, wie es nach dem bewiesenen allgemeinen Satze seyn muss.

Bemerkung. Man kann die vorher bewiesene Gleichung auch unter der Form

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)}{\partial x} = \frac{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)}{\partial y},$$

wo alle Differentialquotienten partielle Differentialquotienten sind, oder, wenn man sich einer leicht verständlichen abkürzenden Bezeichnung bedient, unter der Form

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

darstellen, d. h. man erhält jederzeit einerlei Resultat, wenn man zuerst den partiellen Differentialquotienten der Function u in Bezug auf y als veränderliche Grösse, und von diesem Differentialquotienten dann den partiellen Differentialquotienten in Bezug auf x als veränderliche Grösse entwickelt, oder die Ordnung dieser Differentiationen umkehrt.

Dies lässt sich sehr leicht auf folgende Art aus dem vorher bewiesenen Lehrsätze herleiten.

Es ist

$$\partial_y u = \frac{\partial u}{\partial y} \partial y,$$

und folglich, wenn man nach x differentiirt,

$$\partial_x \partial_y u = \frac{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)}{\partial x} \partial x \partial y.$$

Ganz eben so findet man

$$\partial_y \partial_x u = \frac{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)}{\partial y} \partial x \partial y.$$

Weil nun nach dem vorher bewiesenen Lehrsätze

$$\partial_x \partial_y u = \partial_y \partial_x u$$

ist; so ist

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial x} \partial x \partial y = \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial y} \partial x \partial y,$$

und folglich

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial y},$$

oder

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x},$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 134.

Zusatz. Wenn $u = f(x, y)$ eine Function der beiden veränderlichen Grössen x, y ist, und α, β zwei beliebige positive ganze Zahlen sind; so ist immer

$$\partial_x^\alpha \partial_y^\beta u = \partial_y^\beta \partial_x^\alpha u.$$

Dieser Satz lässt sich auf folgende Art leicht beweisen.

I. Nach §. 133. ist

$$1. \quad \partial_x \partial_y u = \partial_y \partial_x u,$$

und folglich auch

$$2. \quad \partial_x \partial_x \partial_y u = \partial_x \partial_y \partial_x u.$$

Aber

$$3. \quad \partial_x \partial_x \partial_y u = \partial_x^2 \partial_y u$$

und nach §. 133.

$$4. \quad \partial_x \partial_y \partial_x u = \partial_y \partial_x \partial_x u = \partial_y \partial_x^2 u.$$

Also ist

$$5. \quad \partial_x^2 \partial_y u = \partial_y \partial_x^2 u.$$

Folglich ist auch

$$6. \quad \partial_x \partial_x^2 \partial_y u = \partial_x \partial_y \partial_x^2 u.$$

Aber

$$7. \quad \partial_x \partial_x^2 \partial_y u = \partial_x^3 \partial_y u$$

und nach §. 133.

$$8. \quad \partial_x \partial_y \partial_x^2 u = \partial_y \partial_x \partial_x^2 u = \partial_y \partial_x^3 u.$$

Also ist

$$9. \quad \partial_x^3 \partial_y u = \partial_y \partial_x^3 u$$

und folglich auch

$$10. \quad \partial_x \partial_x^3 \partial_y u = \partial_x \partial_y \partial_x^3 u.$$

Aber

$$11. \quad \partial_x \partial_x^3 \partial_y u = \partial_x^4 \partial_y u$$

und nach §. 133.

$$12. \partial_x \partial_y \partial_x^3 u = \partial_y \partial_x \partial_x^3 u (= \partial_y \partial_x^4 u).$$

Also ist

$$13. \partial_x^4 \partial_y u = \partial_y \partial_x^4 u.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar, und es ist folglich offenbar allgemein

$$\partial_x^\alpha \partial_y u = \partial_y \partial_x^\alpha u.$$

II. Daher ist nun ferner

$$1. \partial_y \partial_x^\alpha \partial_y u = \partial_y \partial_y \partial_x^\alpha u$$

Aber nach I.

$$2. \partial_y \partial_x^\alpha \partial_y u = \partial_x^\alpha \partial_y \partial_y u = \partial_x^\alpha \partial_y^2 u$$

und

$$3. \partial_y \partial_y \partial_x^\alpha u = \partial_y^2 \partial_x^\alpha u.$$

Also ist

$$4. \partial_x^\alpha \partial_y^2 u = \partial_y^2 \partial_x^\alpha u,$$

und folglich

$$5. \partial_y \partial_x^\alpha \partial_y^2 u = \partial_y \partial_y^2 \partial_x^\alpha u.$$

Aber nach I.

$$6. \partial_y \partial_x^\alpha \partial_y^2 u = \partial_x^\alpha \partial_y \partial_y^2 u = \partial_x^\alpha \partial_y^3 u$$

und

$$7. \partial_y \partial_y^2 \partial_x^\alpha u = \partial_y^3 \partial_x^\alpha u.$$

Also ist

$$8. \partial_x^\alpha \partial_y^3 u = \partial_y^3 \partial_x^\alpha u.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, erhellet hieraus schon deutlich genug, und es ist folglich offenbar allgemein

$$\partial_x^\alpha \partial_y^\beta u = \partial_y^\beta \partial_x^\alpha u,$$

wie bewiesen werden sollte.

Bemerkung. Die in diesem Zusatze bewiesene Gleichung lässt sich auch unter der Form

$$\frac{\partial^\alpha \left(\frac{\partial^\beta u}{\partial y^\beta} \right)}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^\beta \left(\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right)}{\partial y^\beta},$$

wo alle Differentialquotienten partielle Differentialquotienten sind, oder mittelst einer, der in der Bemerkung zum vorigen Lehrsatz gebrachten ähnlichen, leicht verständlichen abkürzenden Bezeichnung, unter der Form

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} u}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta}} = \frac{\partial^{\alpha+\beta} u}{\partial y^{\beta} \partial x^{\alpha}}$$

darstellen, wie auf folgende Art leicht bewiesen werden kann.

Es ist

$$\partial_y^{\beta} u = \frac{\partial^{\beta} u}{\partial y^{\beta}} \partial y^{\beta},$$

und folglich, wenn man α mal nach x differentiirt,

$$\partial_x^{\alpha} \partial_y^{\beta} u = \frac{\partial^{\alpha} \left(\frac{\partial^{\beta} u}{\partial y^{\beta}} \right)}{\partial x^{\alpha}} \partial x^{\alpha} \partial y^{\beta}.$$

Ganz auf dieselbe Art erhält man

$$\partial_y^{\beta} \partial_x^{\alpha} u = \frac{\partial^{\beta} \left(\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial x^{\alpha}} \right)}{\partial y^{\beta}} \partial x^{\alpha} \partial y^{\beta}.$$

Weil nun nach dem vorher Bewiesenen

$$\partial_x^{\alpha} \partial_y^{\beta} u = \partial_y^{\beta} \partial_x^{\alpha} u$$

ist; so ist

$$\frac{\partial^{\alpha} \left(\frac{\partial^{\beta} u}{\partial y^{\beta}} \right)}{\partial x^{\alpha}} \partial x^{\alpha} \partial y^{\beta} = \frac{\partial^{\beta} \left(\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial x^{\alpha}} \right)}{\partial y^{\beta}} \partial x^{\alpha} \partial y^{\beta},$$

und folglich

$$\frac{\partial^{\alpha} \left(\frac{\partial^{\beta} u}{\partial y^{\beta}} \right)}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial^{\beta} \left(\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial x^{\alpha}} \right)}{\partial y^{\beta}},$$

oder

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} u}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta}} = \frac{\partial^{\alpha+\beta} u}{\partial y^{\beta} \partial x^{\alpha}},$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 135.

Lehrsatz. Wenn

$$u = f(x, y, z, v, \dots s, t)$$

eine Function der beliebig vielen veränderlichen Grössen $x, y, z, v, \dots s, t$ ist, oder wenigstens als eine bloss von diesen veränderlichen Grössen abhängende Function betrachtet wird; so bleibt der Ausdruck

$$\partial_x \partial_y \partial_z \partial_v \dots \partial_s \partial_t u$$

völlig ungeändert, wie man auch die Symbole

$$\partial_x, \partial_y, \partial_z, \partial_v, \dots \partial_s, \partial_t$$

unter einander versetzen mag.

Beweis. Für Functionen mit zwei veränderlichen Grössen ist der Satz schon in §. 133. bewiesen worden.

Wir wollen nun die Anzahl der veränderlichen Grössen $x, y, z, v, \dots s, t$, von denen zwei beliebige durch p und q bezeichnet werden mögen, $= n + 1$ setzen, und nehmen den zu beweisenden Satz bis zu Functionen mit n veränderlichen Grössen als gültig oder schon bewiesen an.

Zwei beliebige Permutationen der Symbole

$$\partial_x, \partial_y, \partial_z, \partial_v, \dots \partial_s, \partial_t,$$

wenn man das eine Mal das Glied ∂_p , das andere Mal das Glied ∂_q aus dieser Reihe weglässt, sollen respective durch P_p und P'_q bezeichnet werden. Dann kann man zwei beliebige Permutationen der sämtlichen Symbole

$$\partial_x, \partial_y, \partial_z, \partial_v, \dots \partial_s, \partial_t$$

durch $P_p \partial_p$ und $P'_q \partial_q$ bezeichnen, und soll nun beweisen, dass

$$P_p \partial_p u = P'_q \partial_q u$$

ist.

Weil nach der Voraussetzung der Satz für Functionen mit n veränderlichen Grössen gilt; so kann man, indem man jetzt $\partial_p u$ als die Function betrachtet, von welcher die Differentiale zu nehmen sind, die Elemente der Permutation P_p so unter einander versetzen, dass das Element ∂_q in die letzte Stelle kommt, d. h. man kann

$$P_p \partial_p u = \Pi_{p,q} \partial_q \partial_p u$$

setzen, wo $\Pi_{p,q}$ eine beliebige Permutation der Elemente

$$\partial_x, \partial_y, \partial_z, \partial_v, \dots \partial_s, \partial_t$$

nach Weglassung der beiden Elemente ∂_p und ∂_q bezeichnet; und ganz auf ähnliche Art kann man

$$P'_q \partial_q u = \Pi'_{p,q} \partial_p \partial_q u$$

setzen.

Weil nun aber nach §. 133.

$$\partial_q \partial_p u = \partial_p \partial_q u$$

ist, weil ferner die beiden Permutationen $\Pi_{p,q}$ und $\Pi'_{p,q}$ ganz dieselben Elemente enthalten, und weil nach der Voraus-

setzung der zu beweisende Satz für Functionen mit $n - 1$ veränderlichen Grössen gilt; so ist offenbar

$$\Pi_p, q \partial_q \partial_p u = \Pi_p, q \partial_p \partial_q u,$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$P_p \partial_p u = P_q \partial_q u,$$

wie bewiesen werden sollte.

Man sieht also, dass der Satz für Functionen mit $n + 1$ veränderlichen Grössen gilt, wenn er bis zu Functionen mit n veränderlichen Grössen gilt.

Hieraus folgt die allgemeine Richtigkeit des Satzes nach einer bekannten Schlussweise mittelst §. 133.

§. 136.

Zusatz. Wenn

$$u = f(x, y, z, v, \dots s, t)$$

eine Function der beliebig vielen veränderlichen Grössen $x, y, z, v, \dots s, t$ ist, oder wenigstens als eine bloss von diesen veränderlichen Grössen abhängende Function betrachtet wird; so bleibt der Ausdruck

$$\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_z^\gamma \partial_v^\delta \dots \partial_s^\kappa \partial_t^\lambda u,$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots \kappa, \lambda$ beliebige positive ganze Zahlen bezeichnen, völlig ungeändert, wie man auch in demselben die Symbole

$$\partial_x^\alpha, \partial_y^\beta, \partial_z^\gamma, \partial_v^\delta, \dots \partial_s^\kappa, \partial_t^\lambda$$

unter einander versetzen mag.

Dieser Satz wird ganz eben so aus §. 134. hergeleitet, wie der in §. 135. bewiesene Satz aus §. 133. hergeleitet worden ist.

§. 137.

Wir wollen nun annehmen, dass

$$u = f(p, q, s, t, \dots v, w)$$

eine beliebige Function der veränderlichen Grössen $p, q, s, t, \dots v, w$ sey, dass aber diese veränderlichen Grössen keine unabhängigen veränderlichen Grössen seyen, sondern dass jede derselben eine Function der von einander unabhängigen veränderlichen Grössen $x, y, z, \dots$ sey, und wollen nun das vollständige Differential von u zu entwickeln suchen.

Zu dem Ende denken wir uns, dass die unabhängigen veränderlichen Grössen $x, y, z, \dots$ die Aenderungen $\alpha \partial x, \alpha \partial y,$

$a\partial z, \dots$, wo $\partial x, \partial y, \partial z, \dots$ wie immer beliebige constante Grössen bezeichnen, erleiden, und bezeichnen die dadurch herbeigeführten Aenderungen der Functionen $p, q, s, t, \dots v, w$ respective durch $\Delta p, \Delta q, \Delta s, \Delta t, \dots \Delta v, \Delta w$, den veränderten Werth der Function u also durch

$$f(p + \Delta p, q + \Delta q, s + \Delta s, t + \Delta t, \dots v + \Delta v, w + \Delta w).$$

Ferner wollen wir, unter der Voraussetzung, dass n die Anzahl der Grössen $p, q, s, t, \dots v, w$ ist, die Functionen

$$\begin{aligned} & f(p, q, s, t, \dots v, w), \\ & f(p + \Delta p, q, s, t, \dots v, w), \\ & f(p + \Delta p, q + \Delta q, s, t, \dots v, w), \\ & f(p + \Delta p, q + \Delta q, s + \Delta s, t, \dots v, w) \end{aligned}$$

U. S. W.

$$f(p + \Delta p, q + \Delta q, s + \Delta s, t + \Delta t, \dots w + \Delta w)$$

der Kürze wegen respective durch $u, u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ bezeichnen; so ist, wenn jetzt wieder $q_1, q_2, q_3, q_4, \dots, q_{n-1}, q_n$ gewisse positive echte Brüche bezeichnen, nach §. 110. II.

$$\begin{aligned} u_1 - u &= f'_p(p + \varrho_1 \Delta p, q, s, t, \dots v, w) \cdot \Delta p, \\ u_2 - u_1 &= f'_q(p + \Delta p, q + \varrho_2 \Delta q, s, t, \dots v, w) \cdot \Delta q, \\ u_3 - u_2 &= f'_s(p + \Delta p, q + \Delta q, s + \varrho_3 \Delta s, t, \dots v, w) \cdot \Delta s, \end{aligned}$$

u. s. w.

$$u_n - u_{n-1} = f'_w(p + \Delta p, q + \Delta q, s + \Delta s, \dots, v + \Delta v, w + \varrho_n \Delta w) \cdot \Delta w,$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten addirt,

$$= f'_p(p + \varrho_1 \Delta p, q, s, t, \dots v, w) \cdot \Delta p$$
$$+ f'_q(p + \Delta p, q + \varrho_2 \Delta q, s, t, \dots v, w) \cdot \Delta q$$
$$+ f'_s(p + \Delta p, q + \Delta q, s + \varrho_3 \Delta s, t, \dots v, w) \cdot \Delta s$$
$$\quad$$
$$+ f'_w(p + \Delta p, q + \Delta q, s + \Delta s, \dots v + \Delta v, w + \varrho_n \Delta w) \cdot \Delta w.$$

Setzen wir nun wie in §. 129. $u_n = F(\alpha)$; so ist offenbar $u = F(0)$, und folglich

$$\begin{aligned} &= \frac{F(\alpha) - F(0)}{\alpha} \\ &= f'_p(p + \varrho_1 \Delta p, q, s, t, \dots, v, w) \cdot \frac{\Delta p}{\alpha} \\ &\quad + f'_q(p + \Delta p, q + \varrho_2 \Delta q, s, t, \dots, v, w) \cdot \frac{\Delta q}{\alpha} \\ &\quad + f'_s(p + \Delta p, q + \Delta q, s + \varrho_3 \Delta s, t, \dots, v, w) \cdot \frac{\Delta s}{\alpha} \\ &\quad \vdots \\ &\quad + f'_w(p + \Delta p, q + \Delta q, s + \Delta s, \dots, v + \Delta v, w + \varrho_n \Delta w) \cdot \frac{\Delta w}{\alpha}. \end{aligned}$$

Stellen wir uns jetzt vor, dass α sich der Null nähert, und gehen zu den Grenzen über; so ist nach §. 129.

$$\lim \frac{F(\alpha) - F(0)}{\alpha} = \lim \frac{\Delta u}{\alpha} = \partial u,$$

und ganz eben so

$$\lim \frac{\Delta p}{\alpha} = \partial p, \quad \lim \frac{\Delta q}{\alpha} = \partial q, \quad \lim \frac{\Delta s}{\alpha} = \partial s, \quad \dots \quad \lim \frac{\Delta w}{\alpha} = \partial w,$$

wo $\partial u, \partial p, \partial q, \partial s, \dots \partial w$ die vollständigen Differentiale der Functionen $u, p, q, s, \dots w$ sind. Die Differenzen

$$\Delta p, \Delta q, \Delta s, \Delta t, \dots \Delta v, \Delta w,$$

und folglich, weil $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4, \dots \varrho_{n-1}, \varrho_n$ positive echte Brüche sind, auch die Producte

$$\varrho_1 \Delta p, \varrho_2 \Delta q, \varrho_3 \Delta s, \varrho_4 \Delta t, \dots \varrho_{n-1} \Delta v, \varrho_n \Delta w,$$

nähern sich, wenn α sich der Null nähert, offenbar sämmtlich der Null als ihrer Gränze. Daher nähern die Grössen

$$f'_p(p + \varrho_1 \Delta p, q, s, t, \dots v, w),$$

$$f'_q(p + \Delta p, q + \varrho_2 \Delta q, s, t, \dots v, w),$$

$$f'_s(p + \Delta p, q + \Delta q, s + \varrho_3 \Delta s, t, \dots v, w),$$

u. s. w.

$$f'_w(p + \Delta p, q + \Delta q, s + \Delta s, \dots v + \Delta v, w + \varrho_n \Delta w)$$

sich, wenn α sich der Null nähert, offenbar respective den Grössen

$$f'_p(p, q, s, t, \dots v, w),$$

$$f'_q(p, q, s, t, \dots v, w),$$

$$f'_s(p, q, s, t, \dots v, w),$$

u. s. w.

$$f'_w(p, q, s, t, \dots v, w)$$

als ihren Gränzen, und aus der obigen Gleichung ergibt sich folglich, wenn man auf beiden Seiten die Gränzen nimmt, auf der Stelle die Gleichung

$$\partial u = f'_p(p, q, s, t, \dots v, w) \cdot \partial p$$

$$+ f'_q(p, q, s, t, \dots v, w) \cdot \partial q$$

$$+ f'_s(p, q, s, t, \dots v, w) \cdot \partial s$$

$$\dots$$

$$+ f'_w(p, q, s, t, \dots v, w) \cdot \partial w,$$

oder, weil

$$\partial_p u = f'_p(p, q, s, t, \dots v, w) \cdot \partial p,$$

$$\partial_q u = f'_q(p, q, s, t, \dots v, w) \cdot \partial q,$$

$$\partial_s u = f'_s(p, q, s, t, \dots v, w) \cdot \partial s,$$

u. s. w.

$$\partial_w u = f'_w(p, q, s, t, \dots v, w) \cdot \partial w$$

ist, die Gleichung

$$\partial u = \partial_p u + \partial_q u + \partial_s u + \dots \partial_w u.$$

Dass diese Gleichung der in §. 130. gefundenen Gleichung völlig ähnlich ist, fällt auf der Stelle in die Augen. Nur findet der wohl zu beachtende Unterschied Statt, dass die in ∂u enthaltenen Grössen $\partial p, \partial q, \partial s, \dots \partial w$ nicht, wie in §. 130. die Grössen $\partial x, \partial y, \partial z, \dots \partial t$, willkürliche constante Grössen, sondern Functionen der unabhängigen veränderlichen Grössen $x, y, z, \dots$ und der willkürlichen constanten Grössen $\partial x, \partial y, \partial z, \dots$ sind. Will man also das zweite und die höhern Differentiale der Function u entwickeln; so kann man allerdings immer nach der in der Gleichung

$$\partial u = \partial_p u + \partial_q u + \partial_s u + \dots + \partial_w u$$

enthaltenen Regel verfahren, darf aber, wenn man z. B. von ∂u zu $\partial^2 u$ übergeht, die Differentiale $\partial p, \partial q, \partial s, \dots \partial w$ nicht als constante Grössen betrachten, sondern muss dieselben als neue veränderliche Grössen behandeln. Eben so muss man, wenn man von $\partial^2 u$ zu $\partial^3 u$ übergeht, die Grössen $\partial p, \partial q, \partial s, \dots \partial w$; $\partial^2 p, \partial^2 q, \partial^2 s, \dots \partial^2 w$ sämmtlich als neue veränderliche Grössen behandeln, u. s. w.

Die partiellen Differentiale der Function $u = pq$ in Bezug auf p und q sind z. B. respective

$$q \partial p \text{ und } p \partial q.$$

Die partiellen Differentiale von ∂u in Bezug auf $p, q, \partial p, \partial q$ sind ferner respective

$$\partial p \partial q, \partial q \partial p, q \partial^2 p, p \partial^2 q.$$

Also ist

$$\partial^2 u = p \partial^2 q + 2 \partial p \partial q + q \partial^2 p.$$

Eben so sind die partiellen Differentiale von $\partial^2 u$ in Bezug auf $p, q, \partial p, \partial q, \partial^2 p, \partial^2 q$ respective

$$\partial p \partial^2 q, \partial q \partial^2 p, 2 \partial^2 p \partial q, 2 \partial p \partial^2 q, q \partial^3 p, p \partial^3 q.$$

Also ist

$$\partial^3 u = p \partial^3 q + 3 \partial^2 p \partial q + 3 \partial p \partial^2 q + q \partial^3 p,$$

und man wird nun schon sehen, wie man auf diese Art weiter gehen kann.

Hat man die beliebige Function

$$u = f(x, y)$$

der beiden veränderlichen Grössen x, y , und betrachtet y als von x abhängig; so ist zuerst

$$\partial u = \frac{\partial u}{\partial x} \partial x + \frac{\partial u}{\partial y} \partial y,$$

und hieraus ergiebt sich ferner leicht nach der oben bewiesenen allgemeinen Regel

$$\partial^2 u = \partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot \partial x + \partial \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot \partial y + \frac{\partial u}{\partial y} \partial^2 y.$$

Aber

$$\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \partial x + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \partial y,$$

$$\partial \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \partial x + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \partial y.$$

Also ist

$$\partial^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \partial x^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \partial x \partial y + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \partial y^2 + \frac{\partial u}{\partial y} \partial^2 y.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar. Die Differentialquotienten sind hier natürlich sämmtlich partielle Differentialquotienten.

Achtes Kapitel.

Der Taylor'sche und Maclaurin'sche Satz für Functionen mit mehrern veränderlichen Grössen.

§. 138.

Wir nehmen jetzt wieder an, dass

$$u = f(x, y, z, \dots)$$

eine Function der von einander unabhängigen veränderlichen Grössen $x, y, z, \dots$ ist, und setzen

$$F(\alpha) = f(x + \alpha \partial x, y + \alpha \partial y, z + \alpha \partial z, \dots),$$

oder, indem wir der Kürze wegen

$$x + \alpha \partial x = x_1, y + \alpha \partial y = y_1, z + \alpha \partial z = z_1, \dots$$

setzen,

$$F(\alpha) = f(x_1, y_1, z_1, \dots).$$

Betrachten wir nun $x_1, y_1, z_1, \dots$ als Functionen von α ; so ist

$$\partial x_1 = \partial \alpha \partial x, \partial y_1 = \partial \alpha \partial y, \partial z_1 = \partial \alpha \partial z, \dots$$

Nach §. 137. ist aber, wenn immer bloss α als unabhängige veränderliche Grösse betrachtet wird,

$$\partial F(\alpha) = \frac{\partial F(\alpha)}{\partial x_1} \partial x_1 + \frac{\partial F(\alpha)}{\partial y_1} \partial y_1 + \frac{\partial F(\alpha)}{\partial z_1} \partial z_1 + \dots,$$

wo

$$\frac{\partial F(\alpha)}{\partial x_1}, \frac{\partial F(\alpha)}{\partial y_1}, \frac{\partial F(\alpha)}{\partial z_1}, \dots$$

die partiellen Differentialquotienten von $F(\alpha)$ in Bezug auf $x_1, y_1, z_1, \dots$ als veränderliche Grössen sind. Also ist nach dem Obigen

$$\partial F(\alpha) = \frac{\partial F(\alpha)}{\partial x_1} \partial x \partial \alpha + \frac{\partial F(\alpha)}{\partial y_1} \partial y \partial \alpha + \frac{\partial F(\alpha)}{\partial z_1} \partial z \partial \alpha + \dots$$

und folglich

$$\frac{\partial F(\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial F(\alpha)}{\partial x_1} \partial x + \frac{\partial F(\alpha)}{\partial y_1} \partial y + \frac{\partial F(\alpha)}{\partial z_1} \partial z + \dots$$

oder

$$F'(\alpha) = \frac{\partial F(\alpha)}{\partial x_1} \partial x + \frac{\partial F(\alpha)}{\partial y_1} \partial y + \frac{\partial F(\alpha)}{\partial z_1} \partial z + \dots$$

Ueberlegt man nun, dass

$$\partial u = \frac{\partial u}{\partial x} \partial x + \frac{\partial u}{\partial y} \partial y + \frac{\partial u}{\partial z} \partial z + \dots$$

ist, und dass $F(\alpha)$ aus u hervorgeht, wenn man in u für $x, y, z, \dots$ respective $x_1, y_1, z_1, \dots$ setzt; so erhellet auf der Stelle, dass auch $F'(\alpha)$ aus ∂u erhalten wird, wenn man in ∂u für $x, y, z, \dots$ respective $x_1, y_1, z_1, \dots$ setzt.

Da nun wieder nach §. 137. in Bezug auf α als unabhängige veränderliche Grösse

$$\partial F'(\alpha) = \frac{\partial F'(\alpha)}{\partial x_1} \partial x_1 + \frac{\partial F'(\alpha)}{\partial y_1} \partial y_1 + \frac{\partial F'(\alpha)}{\partial z_1} \partial z_1 + \dots,$$

d. i. nach dem Obigen

$$\partial F'(\alpha) = \frac{\partial F'(\alpha)}{\partial x_1} \partial x \partial \alpha + \frac{\partial F'(\alpha)}{\partial y_1} \partial y \partial \alpha + \frac{\partial F'(\alpha)}{\partial z_1} \partial z \partial \alpha + \dots$$

ist; so ist

$$\frac{\partial F'(\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial F'(\alpha)}{\partial x_1} \partial x + \frac{\partial F'(\alpha)}{\partial y_1} \partial y + \frac{\partial F'(\alpha)}{\partial z_1} \partial z + \dots$$

oder

$$F''(\alpha) = \frac{\partial F'(\alpha)}{\partial x_1} \partial x + \frac{\partial F'(\alpha)}{\partial y_1} \partial y + \frac{\partial F'(\alpha)}{\partial z_1} \partial z + \dots$$

Ueberlegt man nun wieder, dass

$$\partial^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x} \partial x + \frac{\partial^2 u}{\partial y} \partial y + \frac{\partial^2 u}{\partial z} \partial z + \dots$$

ist, und dass $F'(\alpha)$ aus ∂u hervorgeht, wenn man in ∂u für $x, y, z, \dots$ respective $x_1, y_1, z_1, \dots$ setzt; so erhellet sehr leicht, dass auch $F''(\alpha)$ aus $\partial^2 u$ erhalten wird, wenn man in $\partial^2 u$ für $x, y, z, \dots$ respective $x_1, y_1, z_1, \dots$ setzt.

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, bedarf keiner Erläuterung mehr. Im Allgemeinen erhellet, dass überhaupt $F^{(n)}(\alpha)$ aus $\partial^n u$ erhalten wird, wenn man in $\partial^n u$ für $x, y, z, \dots$ respective $x_1, y_1, z_1, \dots$ d. i. $x + \alpha \partial x, y + \alpha \partial y, z + \alpha \partial z, \dots$ setzt.

§. 139.

Nach §. 109. ist nun, unter der Voraussetzung, dass die Functionen

$$F(\alpha), F'(\alpha), F''(\alpha), F'''(\alpha), \dots F^{(n)}(\alpha)$$

von $\alpha = 0$ bis $\alpha = \alpha$ stetig sind,

$$F(\alpha) = F(0) + \frac{\alpha}{1} F'(0) + \frac{\alpha^2}{1.2} F''(0) + \frac{\alpha^3}{1.2.3} F'''(0) + \dots$$

$$\dots + \frac{\alpha^{n-1}}{1\dots(n-1)} F^{(n-1)}(0) + \frac{\alpha^n}{1\dots n} F^{(n)}(\rho\alpha),$$

wo ρ einen positiven echten Bruch bezeichnet.

Nach §. 138. werden die Grössen

$$F(\alpha), F'(\alpha), F''(\alpha), F'''(\alpha), \dots F^{(n-1)}(\alpha)$$

respective aus

$$u, \partial u, \partial^2 u, \partial^3 u, \dots \partial^{n-1} u$$

erhalten, wenn man in diesen Functionen für $x, y, z, \dots$ respective $x + \alpha \partial x, y + \alpha \partial y, z + \alpha \partial z, \dots$ setzt.

Also ist offenbar

$$F(0) = u, F'(0) = \partial u, F''(0) = \partial^2 u, \dots F^{(n-1)}(0) = \partial^{n-1} u$$

und folglich

$$F(\alpha) = u + \frac{\alpha}{1} \partial u + \frac{\alpha^2}{1.2} \partial^2 u + \frac{\alpha^3}{1.2.3} \partial^3 u + \dots$$

$$\dots + \frac{\alpha^{n-1}}{1\dots(n-1)} \partial^{n-1} u + \frac{\alpha^n}{1\dots n} F^{(n)}(\rho\alpha)$$

oder

$$f(x + \alpha \partial x, y + \alpha \partial y, z + \alpha \partial z, \dots)$$

$$= u + \frac{\alpha}{1} \partial u + \frac{\alpha^2}{1.2} \partial^2 u + \frac{\alpha^3}{1.2.3} \partial^3 u + \dots$$

$$\dots + \frac{\alpha^{n-1}}{1\dots(n-1)} \partial^{n-1} u + \frac{\alpha^n}{1\dots n} F^{(n)}(\rho\alpha),$$

immer unter der Voraussetzung, dass die Functionen

$$F(\alpha), F'(\alpha), F''(\alpha), F'''(\alpha), \dots F^{(n)}(\alpha),$$

welche aus

$$u, \partial u, \partial^2 u, \partial^3 u, \dots \partial^n u$$

erhalten werden, wenn man für $x, y, z, \dots$ respective $x + \alpha \partial x, y + \alpha \partial y, z + \alpha \partial z, \dots$ setzt, von $\alpha = 0$ bis $\alpha = \alpha$ stetig sind. $F^{(n)}(\rho\alpha)$ geht aus $\partial^n u$ hervor, wenn man in $\partial^n u$ für $x, y, z, \dots$ respective $x + \rho \alpha \partial x, y + \rho \alpha \partial y, z + \rho \alpha \partial z, \dots$ setzt, und ρ bezeichnet immer einen positiven echten Bruch.

Für $\alpha = 1$ ergibt sich

$$f(x + \partial x, y + \partial y, z + \partial z, \dots)$$

$$= u + \frac{\partial u}{1} + \frac{\partial^2 u}{1.2} + \frac{\partial^3 u}{1.2.3} + \dots + \frac{\partial^{n-1} u}{1\dots(n-1)} + \frac{F^{(n)}(\rho)}{1\dots n},$$

wo ρ ein positiver echter Bruch ist, $F^{(n)}(\rho)$ aus dem Differential $\partial^n u$ hervorgeht, wenn man für $x, y, z, \dots$ respective $x + \rho \partial x, y + \rho \partial y, z + \rho \partial z, \dots$ setzt, und immer die Voraussetzung festzuhalten ist, dass die Functionen

$$F(\alpha), F'(\alpha), F''(\alpha), F'''(\alpha), \dots, F^{(n)}(\alpha),$$

welche aus

$$u, \partial u, \partial^2 u, \partial^3 u, \dots, \partial^n u$$

erhalten werden, wenn man für $x, y, z, \dots$ respective $x + \alpha \partial x, y + \alpha \partial y, z + \alpha \partial z, \dots$ setzt, von $\alpha = 0$ bis $\alpha = 1$ stetig seyn müssen.

Hieraus ergeben sich nun ferner die folgenden Sätze.

I. Nähert sich die Grösse

$$\frac{\alpha^n}{1 \dots n} F^{(n)}(\rho \alpha),$$

wo ρ ein positiver echter Bruch ist, und $F^{(n)}(\rho \alpha)$ aus $\partial^n u$ erhalten wird, wenn man für $x, y, z, \dots$ respective $x + \rho \alpha \partial x, y + \rho \alpha \partial y, z + \rho \alpha \partial z, \dots$ setzt, der Null, wenn man n wachsen lässt, und kann der Null beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur n gross genug nimmt; so ist immer

$$\begin{aligned} & f(x + \alpha \partial x, y + \alpha \partial y, z + \alpha \partial z, \dots) \\ &= u + \frac{\alpha}{1} \partial u + \frac{\alpha^2}{1.2} \partial^2 u + \frac{\alpha^3}{1.2.3} \partial^3 u + \frac{\alpha^4}{1.2.3.4} \partial^4 u + \dots, \end{aligned}$$

jedoch bloss unter der Voraussetzung, dass die Functionen

$$F(\alpha), F'(\alpha), F''(\alpha), F'''(\alpha), F^{(4)}(\alpha), \dots,$$

welche aus

$$u, \partial u, \partial^2 u, \partial^3 u, \partial^4 u, \dots$$

erhalten werden, wenn man für $x, y, z, \dots$ respective $x + \alpha \partial x, y + \alpha \partial y, z + \alpha \partial z, \dots$ setzt, von $\alpha = 0$ bis $\alpha = 1$ sämmtlich stetig sind.

II. Nähert sich die Grösse

$$\frac{F^{(n)}(\rho)}{1 \dots n},$$

wo ρ ein positiver echter Bruch ist, und $F^{(n)}(\rho)$ aus $\partial^n u$ erhalten wird, wenn man für $x, y, z, \dots$ respective $x + \rho \partial x, y + \rho \partial y, z + \rho \partial z, \dots$ setzt, der Null, wenn man n wachsen lässt, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur n gross genug nimmt; so ist

$$\begin{aligned} & f(x + \partial x, y + \partial y, z + \partial z, \dots) \\ &= u + \frac{\partial u}{1} + \frac{\partial^2 u}{1.2} + \frac{\partial^3 u}{1.2.3} + \frac{\partial^4 u}{1.2.3.4} + \dots, \end{aligned}$$

jedoch nur unter der Voraussetzung, dass die Functionen

$$F(\alpha), F'(\alpha), F''(\alpha), F'''(\alpha), F^{IV}(\alpha), \dots,$$

welche aus

$$u, \partial u, \partial^2 u, \partial^3 u, \partial^4 u, \dots$$

erhalten werden, wenn man für $x, y, z, \dots$ respective $x + \alpha \partial x, y + \alpha \partial y, z + \alpha \partial z, \dots$ setzt, von $\alpha = 0$ bis $\alpha = 1$ sämmtlich stetig sind.

Letztern Satz nennt man den Taylor'schen Lehrsatz für Functionen mit mehrern veränderlichen Grössen.

§. 140.

Eine Grösse, welche überhaupt aus dem Differential $\partial^n u$ entsteht, wenn man in demselben für $x, y, z, \dots$ respective $\alpha x, \alpha y, \alpha z, \dots$, und für $\partial x, \partial y, \partial z, \dots$ respective $x, y, z, \dots$ setzt, wollen wir jetzt durch $\varphi_n(\alpha)$ bezeichnen, so dass also $\varphi_n(0)$ eine Grösse bezeichnet, welche aus $\partial^n u$ entsteht, wenn man die Grössen $x, y, z, \dots$ sämmtlich $= 0$, und für $\partial x, \partial y, \partial z, \dots$ respective $x, y, z, \dots$ setzt. $\varphi_0(\alpha)$ bezeichnet hiernach die Grösse, welche aus u entsteht, wenn man für $x, y, z, \dots$ respective $\alpha x, \alpha y, \alpha z, \dots$ setzt, und $\varphi_0(0)$ bezeichnet die Grösse, welche aus u entsteht, wenn man die Grössen $x, y, z, \dots$ sämmtlich $= 0$ setzt.

Es ist leicht zu übersehen, dass die Function $F^{(n)}(\alpha)$, wenn man in derselben die Grössen $x, y, z, \dots$ sämmtlich $= 0$ und für $\partial x, \partial y, \partial z, \dots$ respective $x, y, z, \dots$ setzt, in $\varphi_n(\alpha)$ übergeht. Setzt man nämlich

$$\partial^n u = \psi(x, y, z, \dots; \partial x, \partial y, \partial z, \dots);$$

so ist bekanntlich

$$F^{(n)}(\alpha) = \psi(x + \alpha \partial x, y + \alpha \partial y, z + \alpha \partial z, \dots; \partial x, \partial y, \partial z, \dots),$$

und $F^{(n)}(\alpha)$ geht folglich, wenn man die Grössen $x, y, z, \dots$ sämmtlich $= 0$ und für $\partial x, \partial y, \partial z, \dots$ respective $x, y, z, \dots$ setzt, in

$$\psi(\alpha x, \alpha y, \alpha z, \dots; x, y, z, \dots)$$

über. In dieselbe Grösse geht aber $\partial^n u$ über, wenn man für $x, y, z, \dots$ respective $\alpha x, \alpha y, \alpha z, \dots$, und für $\partial x, \partial y, \partial z, \dots$ respective $x, y, z, \dots$ setzt. Da nun die Grösse, in welche auf diese Weise $\partial^n u$ übergeht, $\varphi_n(\alpha)$ ist; so erhellet die Richtigkeit der oben ausgesprochenen Behauptung.

Denkt man sich also in der in §. 139. bewiesenen Gleichung

$$f(x + \partial x, y + \partial y, z + \partial z, \dots) = u + \frac{\partial u}{1} + \frac{\partial^2 u}{1.2} + \frac{\partial^3 u}{1.2.3} + \dots + \frac{\partial^{n-1} u}{1 \dots (n-1)} + \frac{F^{(n)}(0)}{1 \dots n}$$

die Grössen $x, y, z, \dots$ sämmtlich $= 0$ und für $\partial x, \partial y, \partial z, \dots$ respective $x, y, z, \dots$ gesetzt, so ergibt sich, dass immer

$$f(x, y, z, \dots) = \varphi_0(0) + \frac{\varphi_1(0)}{1} + \frac{\varphi_2(0)}{1.2} + \frac{\varphi_3(0)}{1.2.3} + \dots + \frac{\varphi_{n-1}(0)}{1\dots(n-1)} + \frac{\varphi_n(\rho)}{1\dots n},$$

wo ρ einen positiven echten Bruch bezeichnet, ist, wenn nur die Voraussetzung erfüllt ist, dass die Functionen

$$\varphi_0(\alpha), \varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha), \varphi_3(\alpha), \dots, \varphi_n(\alpha)$$

von $\alpha = 0$ bis $\alpha = 1$ sämmtlich stetig sind, und hieraus ergibt sich ferner unmittelbar der folgende Satz.

Wenn die Grösse

$$\frac{\varphi_n(\rho)}{1\dots n},$$

wo ρ einen positiven echten Bruch bezeichnet, sich, wenn n wächst, der Null nähert, und derselben beliebig nahe gebracht werden kann, wenn man nur n gross genug nimmt, und wenn die Grössen

$$\varphi_0(\alpha), \varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha), \varphi_3(\alpha), \varphi_4(\alpha), \dots$$

von $\alpha = 0$ bis $\alpha = 1$ sämmtlich stetig sind; so ist immer

$$f(x, y, z, \dots) = \varphi_0(0) + \frac{\varphi_1(0)}{1} + \frac{\varphi_2(0)}{1.2} + \frac{\varphi_3(0)}{1.2.3} + \frac{\varphi_4(0)}{1.2.3.4} + \dots$$

Diesen Satz könnte man den Maclaurin'schen Lehrsatz für Functionen mit mehrern veränderlichen Grössen nennen.

Neuntes Kapitel.

Von der Differentiation der unentwickelten Functionen oder der Gleichungen.

§. 141.

Wir wollen jetzt annehmen, dass die Gleichung

$$u = f(x, y, z, \dots) = C,$$

wo C eine constante Grösse bezeichnet, eine identische, d. h. eine für jedes $x, y, z, \dots$ geltende Gleichung sey, so dass

also auch für jedes α und jedes $x, y, z, \dots; \partial x, \partial y, \partial z, \dots$

$$f(x + \alpha \partial x, y + \alpha \partial y, z + \alpha \partial z, \dots) = C$$

ist. Setzen wir folglich wieder

$$F(\alpha) = f(x + \alpha \partial x, y + \alpha \partial y, z + \alpha \partial z, \dots),$$

also

$$F(0) = f(x, y, z, \dots);$$

so ist für jedes α und natürlich auch für jedes $x, y, z, \dots; \partial x, \partial y, \partial z, \dots$

$$F(\alpha) - F(0) = C - C = 0.$$

Also ist auch, wie nahe man auch α bei Null annehmen mag, für jedes $x, y, z, \dots; \partial x, \partial y, \partial z, \dots$

$$\frac{F(\alpha) - F(0)}{\alpha} = 0.$$

Weil nun nach §. 129. unter der Voraussetzung, dass man sich α der Null nähern lässt,

$$\partial u = \lim \frac{F(\alpha) - F(0)}{\alpha}$$

ist; so ist offenbar auch für jedes $x, y, z, \dots; \partial x, \partial y, \partial z, \dots$

$$\partial u = 0,$$

und folglich auch ganz auf dieselbe Weise

$$\partial^2 u = 0, \partial^3 u = 0, \partial^4 u = 0, \dots \partial^n u = 0, \dots$$

Dass dies auch dann noch gilt, wenn die Constante $C = 0$ ist, versteht sich von selbst.

§. 142.

Man habe nun ferner zwischen den veränderlichen Grössen $x, y, z, \dots v, \dots$ die ganz beliebige Gleichung

$$u = f(x, y, z, \dots v, \dots) = 0;$$

so kann offenbar jede der Grössen $x, y, z, \dots v, \dots$ als eine Function aller übrigen betrachtet werden. Betrachten wir nun z. B. v als eine Function von $x, y, z, \dots$, und setzen zu dem Ende

$$v = \varphi(x, y, z, \dots);$$

so ist

$$u = f(x, y, z, \dots \varphi(x, y, z, \dots) \dots) = 0$$

eine identische, d. i. für jedes $x, y, z, \dots$ geltende Gleichung, und folglich nach §. 141.

$$\partial u = 0, \partial^2 u = 0, \partial^3 u = 0, \dots \partial^n u = 0, \dots$$

Weil nun aber nach §.137.

$$\partial u = \frac{\partial u}{\partial x} \partial x + \frac{\partial u}{\partial y} \partial y + \frac{\partial u}{\partial z} \partial z + \dots + \frac{\partial u}{\partial v} \partial v + \dots$$

ist; so hat man, wenn zwischen den Grössen $x, y, z, \dots v, \dots$ die Gleichung

$$u = f(x, y, z, \dots v, \dots) = 0$$

gegeben ist, zwischen den Grössen $x, y, z, \dots v, \dots$; $\partial x, \partial y, \partial z, \dots \partial v, \dots$ jederzeit die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} \partial x + \frac{\partial u}{\partial y} \partial y + \frac{\partial u}{\partial z} \partial z + \dots + \frac{\partial u}{\partial v} \partial v + \dots = 0.$$

Um die Gleichungen

$$\partial^2 u = 0, \partial^3 u = 0, \partial^4 u = 0, \dots \partial^n u = 0, \dots$$

weiter zu entwickeln, müsste man nach den aus dem Obigen bekannten Regeln die Differentiale $\partial^2 u, \partial^3 u, \partial^4 u, \dots$ entwickeln, und hätte dabei nur vorzüglich zu bemerken, dass die höhern Differentiale von $x, y, z, \dots$ sämmtlich $= 0$ zu setzen sind, welches aber von den höhern Differentialen der Grösse v nicht gilt, da diese Grösse keine unabhängige veränderliche Grösse, sondern als eine Function von $x, y, z, \dots$ zu betrachten ist.

Da es völlig willkürlich ist, welche der veränderlichen Grössen, zwischen denen die Gleichung $u=0$ gegeben ist, man als Function der übrigen betrachten will; so ergibt sich aus dem Vorhergehenden überhaupt Folgendes:

Wenn zwischen mehreren veränderlichen Grössen in beliebiger Anzahl eine Gleichung

$$u = 0$$

gegeben ist; so folgen aus dieser Gleichung jederzeit die Gleichungen

$$\partial u = 0, \partial^2 u = 0, \partial^3 u = 0, \dots \partial^n u = 0, \dots,$$

wenn man nur bei der Entwicklung der Differentiale der Function u eine, übrigens beliebige, der veränderlichen Grössen, zwischen denen die Gleichung $u = 0$ gegeben ist, als Function der übrigen betrachtet, also die höhern Differentiale dieser veränderlichen Grösse nicht, die höhern Differentiale der übrigen veränderlichen Grössen dagegen sämmtlich $= 0$ setzt.

§. 143.

Man habe, um dies durch ein Beispiel zu erläutern, zwischen den beiden veränderlichen Grössen x, y die Gleichung

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0;$$

so ist

$$u = y^3 - 3axy + x^3,$$

und folglich

$$\partial u = 3(y^2 - ax)\partial y - 3(ay - x^2)\partial x;$$

also

$$(y^2 - ax)\partial y - (ay - x^2)\partial x = 0.$$

Betrachten wir nun y als Function von x ; so ist

$$\partial^2 u = 3(y^2 - ax)\partial^2 y + 6y\partial y^2 - 6a\partial y\partial x + 6x\partial x^2$$

und folglich

$$(y^2 - ax)\partial^2 y + 2y\partial y^2 - 2a\partial y\partial x + 2x\partial x^2 = 0.$$

Stellt man die beiden gefundenen Gleichungen unter der Form

$$(y^2 - ax)\frac{\partial y}{\partial x} - ay + x^2 = 0,$$

$$(y^2 - ax)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2y\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - 2a\frac{\partial y}{\partial x} + 2x = 0$$

dar; so übersieht man am leichtesten, dass sich mittelst derselben die Differentialquotienten

$$\frac{\partial y}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

durch x und y ausdrücken lassen. Aus der ersten dieser beiden Gleichungen ergibt sich nämlich auf der Stelle

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax},$$

und, wenn man diesen Werth des ersten Differentialquotienten nun ferner in die zweite der beiden obigen Gleichungen einführt, nach einigen leichten Reductionen

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{2a^3 xy}{(y^2 - ax)^3}.$$

Wollte man aber die beiden Differentialquotienten

$$\frac{\partial y}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

bloss durch x ausdrücken; so würde dies nur durch Auflösung der gegebenen Gleichung

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0$$

in Bezug auf y als unbekannte Grösse möglich seyn, indem man nämlich mittelst dieser Gleichung y durch x zu bestimmen und den gefundenen Werth dann für y in die beiden oben für

$$\frac{\partial y}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

gefundenen Ausdrücke einzuführen hätte.

§. 144.

Wir wollen nun noch einige besondere Fälle etwas ausführlicher betrachten.

Ist zuerst zwischen den zwei veränderlichen Grössen x, y die Gleichung $u = 0$ gegeben; so ist nach §. 142.

$$\frac{\partial u}{\partial x} \partial x + \frac{\partial u}{\partial y} \partial y = 0,$$

oder auch, wenn wir y als Function von x betrachten, wie auch nachher immer geschehen soll,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

Das Differential von ∂u in Bezug auf x als unabhängige veränderliche Grösse ist

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \partial x^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \partial x \partial y.$$

Das Differential von ∂u in Bezug auf y als unabhängige veränderliche Grösse ist

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \partial x \partial y + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \partial y^2.$$

Das Differential von ∂u in Bezug auf ∂y als unabhängige veränderliche Grösse ist

$$\frac{\partial u}{\partial y} \partial^2 y.$$

Das vollständige zweite Differentiale von u ist also

$$\partial^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \partial x^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \partial x \partial y + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \partial y^2 + \frac{\partial u}{\partial y} \partial^2 y,$$

und folglich nach §. 142.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \partial x^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \partial x \partial y + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \partial y^2 + \frac{\partial u}{\partial y} \partial^2 y = 0$$

oder

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0.$$

Aus dieser Gleichung findet man $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, nachdem man aus der Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

den ersten Differentialquotienten $\frac{\partial y}{\partial x}$ gefunden hat.

Wie man auf diese Art weiter gehen und auch die höhern Differentialquotienten von y finden kann, wird hieraus schon mit hinreichender Deutlichkeit erhellen.

§. 145.

Wenn zwischen den drei veränderlichen Grössen x, y, z die eine Gleichung $u = 0$ gegeben ist; so kann man z als

Function von x und y betrachten. Dann sind aber x , y , und auch ∂x , ∂y , völlig willkürliche von einander unabhängige Grössen. Nach §. 142. ist nun

$$\frac{\partial u}{\partial x} \partial x + \frac{\partial u}{\partial y} \partial y + \frac{\partial u}{\partial z} \partial z = 0.$$

Weil aber bekanntlich, da z eine Function von x und y ist,

$$\partial z = \frac{\partial z}{\partial x} \partial x + \frac{\partial z}{\partial y} \partial y$$

ist; so ist auch

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right) \partial x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) \partial y = 0,$$

und diese Gleichung gilt für jedes ganz beliebige ∂x und ∂y , zerfällt also in die beiden abgesondert bestehenden Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

mittelst welcher die beiden Differentialquotienten

$$\frac{\partial z}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial z}{\partial y}$$

gefunden werden können.

Aus der ersten dieser beiden Gleichungen ergeben sich nun ganz auf dieselbe Weise, wie diese Gleichungen selbst aus der Gleichung $u = 0$ abgeleitet worden sind, die beiden Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \\ + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial z}{\partial x} \end{aligned} \right\} = 0,$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned} \right\} = 0,$$

d. i.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0,$$

und ganz eben so ergeben sich aus der zweiten der beiden obigen Gleichungen die Gleichungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Daher hat man jetzt bloss die drei folgenden Gleichungen.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

mittelst welcher sich die Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

finden lassen, nachdem man

$$\frac{\partial z}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial z}{\partial y}$$

mittelst der beiden oben entwickelten Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

gefunden hat.

Auch wird hieraus nun schon erhellen, wie man auf diese Art weiter gehen kann.

§. 146.

Hat man zwischen den drei veränderlichen Grössen x, y, z die beiden Gleichungen $u = 0, u_1 = 0$; so kann man y und z als Functionen von x betrachten, und hat nun nach §. 142. offenbar die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0;$$

oder

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

aus denen die beiden Differentialquotienten

$$\frac{\partial y}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial z}{\partial x}$$

gefunden werden können.

Diese beiden Gleichungen führen nun ferner auf dieselbe Weise, wie sie selbst aus den beiden Gleichungen $u = 0, u_1 = 0$ abgeleitet worden sind, zu den beiden Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \\ & + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \end{aligned} \right\} = 0,$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \\ & + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial y \partial z} \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \end{aligned} \right\} = 0,$$

aus denen

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \text{ und } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

gefunden werden können.

Auf diese Art weiter zu gehen, hat, die Weitläufigkeit der Formeln abgerechnet, keine Schwierigkeit.

Zehntes Kapitel.

Von der Bestimmung der in gewissen Fällen unbestimmt zu seyn scheinenden Werthe der reellen Functionen mit einer veränderlichen Grösse.

§. 147.

Es tritt nicht selten der Fall ein, dass für einen bestimmten Werth a der unabhängigen veränderlichen Grösse x Zähler und Nenner einer gebrochenen Function

$$F(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

verschwinden, und dieselbe also für den in Rede stehenden bestimmten Werth von x unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ erscheint. Bei der Bestimmung solcher unbestimmt zu seyn scheinenden Werthe der gebrochenen reellen Functionen mit einer veränderlichen Grösse leistet die Differentialrechnung die vortrefflichsten Dienste, wie wir jetzt zeigen wollen.

Man lasse x sich um Δx verändern; so gehen die Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ respective in

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta f(x) \text{ und } \varphi(x + \Delta x) = \varphi(x) + \Delta \varphi(x)$$

über, und die Function

$$F(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

ist, wenn nur die Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ in der Nähe von x stetig sind, offenbar die Gränze, welcher der Bruch

$$\frac{f(x) + \Delta f(x)}{\varphi(x) + \Delta \varphi(x)}$$

sich nähert, wenn Δx sich der Null nähert. Wenn nun $f(x)$ und $\varphi(x)$ für $x=a$ verschwinden, so dass $f(a)=0$, $\varphi(a)=0$ ist; so ist $F(a)$ offenbar die Gränze, welcher

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta \varphi(x)}$$

sich nähert, indem Δx sich der Null nähert, wenn man nur in dieser Gränze, die im Allgemeinen natürlich eine Function von x ist, ebenfalls $x = a$ setzt. Da nun aber

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta \varphi(x)} = \frac{\Delta f(x) : \Delta x}{\Delta \varphi(x) : \Delta x}$$

ist, und die Gränzen, welchen

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \text{ und } \frac{\Delta \varphi(x)}{\Delta x}$$

sich nähern, wenn Δx sich der Null nähert, bekanntlich die Differentialquotienten

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = f'(x) \text{ und } \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} = \varphi'(x)$$

sind, die Gränze, welcher

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta \varphi(x)}$$

sich nähert, wenn Δx sich der Null nähert, also offenbar der Bruch

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

ist; so ist nach dem Vorhergehenden offenbar

$$F(a) = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)},$$

und hierdurch also der Werth $F(a)$ der Function $F(x)$ bestimmt, wenn nur die Differentialquotienten $f'(x)$ und $\varphi'(x)$ für $x = a$ nicht selbst zugleich verschwinden, auch nicht beide unendlich werden.

Ist aber $f'(a) = 0$, $\varphi'(a) = 0$; so ist ganz wie vorher

$$\frac{f'(a)}{\varphi'(a)} = \frac{f''(a)}{\varphi''(a)},$$

folglich auch

$$F(a) = \frac{f''(a)}{\varphi''(a)},$$

und hierdurch also der Werth $F(a)$ der Function $F(x)$ bestimmt, wenn nur die Differentialquotienten $f''(a)$ und $\varphi''(a)$ für $x = a$

nicht selbst zugleich verschwinden, auch nicht beide unendlich werden.

Ist aber $f''(a) = 0$, $\varphi''(a) = 0$; so ist ganz wie oben

$$\frac{f''(a)}{\varphi''(a)} = \frac{f'''(a)}{\varphi'''(a)},$$

folglich auch

$$F(a) = \frac{f'''(a)}{\varphi'''(a)},$$

und hierdurch also der Werth $F(a)$ der Function $F(x)$ bestimmt, wenn nur die Differentialquotienten $f'''(x)$ und $\varphi'''(x)$ für $x = a$ nicht selbst zugleich verschwinden, auch nicht beide unendlich werden.

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, erhellet leicht, und es ergiebt sich also hieraus überhaupt das folgende merkwürdige allgemeine Theorem:

Wenn

$$F(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

ist, und die Functionen

$$f(x), f'(x), f''(x), f'''(x), \dots, f^{(n-1)}(x);$$

$$\varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \varphi'''(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)$$

für $x = a$ sämmtlich verschwinden; so ist

$$F(a) = \frac{f^{(n)}(a)}{\varphi^{(n)}(a)},$$

und hierdurch also der Werth $F(a)$ der Function $F(x)$ bestimmt, wenn die Differentialquotienten $f^{(n)}(x)$ und $\varphi^{(n)}(x)$ für $x = a$ nicht selbst zugleich verschwinden, auch nicht beide unendlich werden.

§. 148.

Um dieses Theorem auf einige Beispiele anzuwenden; so sey

$$\text{I. } F(x) = \frac{ax^2 - 2acx + ac^2}{bx^2 - 2bcx + bc^2}, = \frac{a}{b} \left(\frac{x-c}{x-c} \right)^2$$

und folglich

$$f(x) = ax^2 - 2acx + ac^2, \quad \varphi(x) = bx^2 - 2bcx + bc^2.$$

Für $x = c$ ist $f(c) = 0$, $\varphi(c) = 0$. Differentiirt man nun, so erhält man

$$f'(x) = 2ax - 2ac, \quad \varphi'(x) = 2bx - 2bc,$$

und es ist folglich wieder $f'(c) = 0$, $\varphi'(c) = 0$. Also muss man von Neuem differentiiren, und erhält

$$f''(x) = 2a, \quad \varphi''(x) = 2b.$$

Da dies für jedes x gilt, so ist auch

$$f''(c) = 2a, \quad \varphi''(c) = 2b,$$

und folglich

$$F(c) = \frac{2a}{2b} = \frac{a}{b}.$$

$$\text{II. } F(x) = \frac{x^3 - ax^2 - a^2x + a^3}{x^2 - a^2} = \frac{x^2 - a^2}{x^2 - a^2} (x - a)$$

also

$$f(x) = x^3 - ax^2 - a^2x + a^3, \quad \varphi(x) = x^2 - a^2.$$

Für $x = a$ ist $f(a) = 0$, $\varphi(a) = 0$. Durch Differentiation ergibt sich

$$f'(x) = 3x^2 - 2ax - a^2, \quad \varphi'(x) = 2x,$$

und folglich $f'(a) = 0$, $\varphi'(a) = 2a$. Also ist

$$F(a) = 0.$$

III. Bekanntlich ist

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Setzen wir nun

$$F(x) = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}; \quad \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} = (x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$$

so ist $f(x) = x^{n+1} - 1$, $\varphi(x) = x - 1$, und folglich $f(1) = 0$, $\varphi(1) = 0$. Durch Differentiation erhält man

$$f'(x) = (n+1)x^n, \quad \varphi'(x) = 1;$$

also $f'(1) = n+1$, $\varphi'(1) = 1$, und folglich $F(1) = n+1$. Der Werth der Summe

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$$

ist für $x = 1$ in der That $= n+1$.

IV. Für $F(x) = \frac{\sin x}{x}$ ist $f(x) = \sin x$, $\varphi(x) = x$, und folglich $f(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$. Durch Differentiation erhält man $f'(x) = \cos x$, $\varphi'(x) = 1$; also ist $f'(0) = 1$, $\varphi'(0) = 1$, und folglich $F(0) = 1$.

V. Für $F(x) = \frac{x - \sin x}{x^3}$ ist

$$f(x) = x - \sin x, \quad \varphi(x) = x^3,$$

und folglich $f(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$. Weil nun

$$f'(x) = 1 - \cos x, \quad \varphi'(x) = 3x^2$$

und folglich $f'(0) = 0$, $\varphi'(0) = 0$ ist; so muss man von Neuem differentiiren. Dadurch erhält man

$$f''(x) = \sin x, \quad \varphi''(x) = 6x,$$

und folglich wieder $f''(0) = 0$, $\varphi''(0) = 0$. Also muss man zum dritten Male differentiiren, und erhält dadurch

$$f'''(x) = \cos x, \quad \varphi'''(x) = 6.$$

Weil nun $f'''(0) = 1$, $\varphi'''(0) = 6$ ist; so ist $F(0) = \frac{1}{6}$.

VI. Für $F(x) = \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$

ist

$$f(x) = e^x - e^{-x} - 2x, \quad q(x) = x - \sin x;$$

$$f(0) = 0, \quad q(0) = 0;$$

$$f'(x) = e^x + e^{-x} - 2, \quad q'(x) = 1 - \cos x;$$

$$f'(0) = 0, \quad q'(0) = 0;$$

$$f''(x) = e^x - e^{-x}, \quad q''(x) = \sin x;$$

$$f''(0) = 0, \quad q''(0) = 0;$$

$$f'''(x) = e^x + e^{-x}, \quad q'''(x) = \cos x;$$

$$f'''(0) = 2, \quad q'''(0) = 1.$$

Also ist $F(0) = 2$.

§. 149.

Oft kommen auch Fälle vor, wo für einen bestimmten Werth a der unabhängigen veränderlichen Grösse x Zähler und Nenner der gebrochenen Function

$$F(x) = \frac{f(x)}{q(x)}$$

unendlich werden. In einem solchen Falle ist

$$\frac{1}{f(a)} = 0, \quad \frac{1}{q(a)} = 0.$$

Weil nun bekanntlich die Differentialquotienten der Functionen

$$\frac{1}{f(x)} \text{ und } \frac{1}{q(x)}$$

respective

$$-\frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2} \text{ und } -\frac{q'(x)}{\{q(x)\}^2}$$

sind; so ist nach §. 147.

$$\frac{\frac{1}{f(a)}}{\frac{1}{q(a)}} = \frac{-\frac{f'(a)}{\{f(a)\}^2}}{-\frac{q'(a)}{\{q(a)\}^2}}$$

oder

$$\frac{q(a)}{f(a)} = \frac{f'(a)}{q'(a)} \cdot \left\{ \frac{q(a)}{f(a)} \right\}^2,$$

und folglich, wie sogleich erhellet, wenn man auf beiden Seiten mit

$$\left\{ \frac{f(a)}{q(a)} \right\}^2$$

multiplicirt,

$$F(a) = \frac{f'(a)}{q'(a)}.$$

Wären aber auch $f'(a)$ und $\varphi'(a)$ beide unendlich; so wäre ganz eben so

$$\frac{f'(a)}{\varphi'(a)} = \frac{f''(a)}{\varphi''(a)},$$

und folglich

$$F(a) = \frac{f''(a)}{\varphi''(a)}.$$

Wären auch $f''(a)$ und $\varphi''(a)$ beide unendlich; so wäre ganz auf dieselbe Art

$$\frac{f''(a)}{\varphi''(a)} = \frac{f'''(a)}{\varphi'''(a)},$$

und folglich

$$F(a) = \frac{f'''(a)}{\varphi'''(a)}.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar, und es ergibt sich nun wieder das folgende allgemeine Theorem:

Wenn

$$F(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

ist, und die Functionen

$$f(x), f'(x), f''(x), f'''(x), \dots f^{(n-1)}(x);$$

$$\varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \varphi'''(x), \dots \varphi^{(n-1)}(x)$$

für $x = a$ sämmtlich unendlich werden; so ist

$$F(a) = \frac{f^{(n)}(a)}{\varphi^{(n)}(a)},$$

und hierdurch also der Werth $F(a)$ der Function $F(x)$ bestimmt, wenn die Differentialquotienten $f^{(n)}(x)$ und $\varphi^{(n)}(x)$ für $x = a$ nicht selbst beide unendlich werden, auch nicht beide zugleich verschwinden.

Für $F(x) = \frac{a^x}{x}$ ist z. B. $f(x) = a^x$, $\varphi(x) = x$, und folglich, wenn, wie wir voraussetzen wollen, a grösser als die Einheit ist, $f(\infty) = \infty$, $\varphi(\infty) = \infty$. Aber $f'(x) = a^x \ln a$, $\varphi'(x) = 1$. Also $f'(\infty) = \infty$, $\varphi'(\infty) = 1$, und folglich $F(\infty) = \infty$.

Für $F(x) = \frac{\ln x}{x}$ ist $f(x) = \ln x$, $\varphi(x) = x$, und folglich $f(\infty) = \infty$, $\varphi(\infty) = \infty$. Aber $f'(x) = \frac{1}{x}$, $\varphi'(x) = 1$, und folglich $f'(\infty) = 0$, $\varphi'(\infty) = 1$; also $F(\infty) = 0$.

§. 150.

Wenn $F(x) = f(x) \cdot \varphi(x)$ ist; so kann es vorkommen, dass der Werth $F(a)$ der Function $F(x)$ sich unter der unbestimmten Form $0 \cdot \pm \infty$ darstellt. Weil aber

$$F(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}} = \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

gesetzt werden kann; so kann die Bestimmung solcher unbestimmten Werthe offenbar immer nach §. 147. und §. 149. bewirkt werden.

Ist z. B. der Werth von

$$F(x) = (1-x) \operatorname{tang} \frac{1}{2} \pi x$$

für $x = 1$ zu bestimmen; so setze man

$$F(x) = \frac{1-x}{\cot \frac{1}{2} \pi x}$$

und folglich

$$f(x) = 1-x, \quad \varphi(x) = \cot \frac{1}{2} \pi x.$$

Differentiirt man nun; so ergiebt sich

$$f'(x) = -1, \quad \varphi'(x) = -\frac{1}{2} \pi (\operatorname{cosec} \frac{1}{2} \pi x)^2;$$

$$f'(1) = -1, \quad \varphi'(1) = -\frac{1}{2} \pi;$$

folglich $F(1) = \frac{2}{\pi}.$

Soll man den Werth von $F(x) = x \log x$ für $x = 0$ bestimmen; so setze man $f(x) = \log x$, $\varphi(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$.

Dann ist

$$f'(x) = \frac{1}{x \log b}, \quad \varphi'(x) = -\frac{1}{x^2},$$

und folglich

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = -\frac{x}{\log b};$$

also

$$F(0) = \frac{f'(0)}{\varphi'(0)} = 0.$$

§. 151.

Wenn $F(x) = f(x) - \varphi(x)$ ist; so tritt zuweilen der Fall ein, dass für einen bestimmten Werth von x die Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ beide unendlich werden. Wie man sich in solchen Fällen zu verhalten hat, wird am besten an ein Paar Beispielen gezeigt werden.

Der in Rede stehende Fall tritt z. B. bei der Function

$$F(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$$

für $x = 1$ ein. Zieht man die beiden Brüche wirklich von einander ab; so erhält man

$$F(x) = \frac{x-1}{1-x^2}, = -\frac{x-1}{(x+1)(x-1)} = -\frac{1}{x+1}$$

und es ist nun, wenn man

$$f(x) = x - 1, \quad \varphi(x) = 1 - x^2$$

setzt, $f(1) = 0$ und $\varphi(1) = 0$, so dass man also jetzt §. 147. anwenden kann. Da nun $f'(x) = 1$, $\varphi'(x) = -2x$, und folglich $f'(1) = 1$, $\varphi'(1) = -2$ ist; so ist nach §. 147. $F(1) = -\frac{1}{2}$.

Ist ferner

$$F(x) = x \tan x - \frac{1}{2} \pi \sec x$$

und die Frage nach dem Werthe $F(\frac{1}{2}\pi)$ von $F(x)$; so setze man

$$F(x) = \frac{x \sin x - \frac{1}{2} \pi}{\cos x},$$

und es ist nun, wenn man

$$f(x) = x \sin x - \frac{1}{2} \pi, \quad \varphi(x) = \cos x$$

setzt, $f(\frac{1}{2}\pi) = 0$ und $\varphi(\frac{1}{2}\pi) = 0$, jetzt also wieder §. 147. anzuwenden. Weil aber

$$f'(x) = x \cos x + \sin x, \quad \varphi'(x) = -\sin x$$

und folglich $f'(\frac{1}{2}\pi) = 1$, $\varphi'(\frac{1}{2}\pi) = -1$ ist; so ist nach §. 147. $F(\frac{1}{2}\pi) = -1$.

Fünftes Kapitel.

Von den grössten und kleinsten Werthen der Functionen.

A. Entwickelte Functionen mit *einer* veränderlichen Grösse.

§. 152.

Es sey $y = f(x)$ eine Function von x , und x selbst bezeichne jetzt irgend einen bestimmten Werth der unabhängigen veränderlichen Grösse. i sey eine unendlich kleine positive Grösse. Auch wollen wir für jetzt immer annehmen, dass die gegebene Function in der Nähe des bestimmten Werths x der unabhängigen veränderlichen Grösse, d. h. in dem unendlich kleinen Intervalle $x - i$, $x + i$ stetig, und in diesem Intervalle also auch stets reell sey.

Wenn nun für unendlich kleine i

$$f(x) > f(x - i), \quad f(x) > f(x + i)$$

ist; so heisst $f(x)$ ein Maximum, ein Grösstes oder ein grösster Werth der gegebenen Function.

Wenn dagegen für unendlich kleine i

$$f(x) < f(x-i), \quad f(x) < f(x+i)$$

ist; so heisst $f(x)$ ein Minimum, ein Kleinstes oder ein kleinster Werth der gegebenen Function.

Wäre aber für unendlich kleine i mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$f(x) \geq f(x-i), \quad f(x) \leq f(x+i);$$

so würde $f(x)$ weder ein Maximum noch ein Minimum der gegebenen Function seyn.

Bei dieser Definition wird, was man wohl zu beachten hat, i immer als unendlich klein angenommen. Unter dieser Voraussetzung sagt man, dass die Werthe $f(x-i)$ und $f(x+i)$ der gegebenen Function dem Werthe $f(x)$ derselben benachbart oder Nachbarwerthe dieses letztern Werths seyen, und kann nun die obigen Erklärungen auch auf folgenden Ausdruck bringen:

Wenn x einen bestimmten Werth der unabhängigen veränderlichen Grösse bezeichnet, so heisst $f(x)$ ein Maximum oder ein grösster Werth der gegebenen Function, wenn derselbe grösser ist als seine Nachbarwerthe nach beiden Seiten hin. Dagegen heisst $f(x)$ ein Minimum oder ein kleinster Werth der gegebenen Function, wenn derselbe kleiner ist als seine Nachbarwerthe nach beiden Seiten hin. In jedem andern Falle ist $f(x)$ weder ein Maximum noch ein Minimum der gegebenen Function.

Es geht aus diesen Erklärungen hervor, dass es für ein und dieselbe Function sowohl mehrere Maxima, als auch mehrere Minima, auch Maxima und Minima zugleich geben kann. Dies erhellet auf der Stelle, wenn man nur nie aus den Augen verliert, dass es sich hierbei immer bloss um das Verhalten der Werthe einer Function zu ihren Nachbarwerthen nach beiden Seiten hin handelt. An Anschaulichkeit gewinnen übrigens die obigen Begriffe, wenn man sich die Function durch eine Curve dargestellt denkt, bei welcher die Abscissen die Werthe der unabhängigen veränderlichen Grösse, die entsprechenden Ordinaten dagegen die entsprechenden Werthe der Function sind. Eine solche Curve wird offenbar in mehrern Punkten so gekrümmt seyn können, dass die zu denselben gehörenden Ordinaten entweder grösser oder kleiner als die benachbarten Ordinaten nach beiden Seiten hin sind, und in solchen Punkten werden die Ordinaten, d. h. die Werthe der gegebenen Function, Maxima oder Minima werden. Ist aber in einem Punkte die Ordinate kleiner oder grösser als die benachbarten Ordinaten nach der einen, und respective grösser oder kleiner als die benachbarten

Ordinaten nach der andern Seite hin; so findet weder ein Maximum, noch ein Minimum Statt.

§. 153.

I. Den analytischen Untersuchungen über die Maxima und Minima, welche nun folgen werden, schicken wir die für diese Untersuchungen sehr wichtige allgemeine Bemerkung voraus, dass, wenn die Function $f(x)$ für den bestimmten Werth x ihrer unabhängigen veränderlichen Grösse nicht verschwindet, und in dem unendlich kleinen Intervall $x - i, x + i$ stetig ist, diese Function in dem in Rede stehenden unendlich kleinen Intervall fortwährend ein und dasselbe Vorzeichen haben muss, wie auf der Stelle erhellet, wenn man nur nicht aus den Augen verliert, dass das Intervall $x - i, x + i$ als unendlich klein angenommen wird, und bedenkt, dass die in diesem Intervalle stetige Function $f(x)$ ihr Zeichen innerhalb desselben nur dann ändern kann, wenn sie innerhalb desselben durch Null hindurch geht oder verschwindet.

II. Dies vorausgesetzt, wollen wir nun annehmen, dass die Function $f(x)$ und ihr erster Differentialquotient $f'(x)$ in dem unendlich kleinen Intervall $x - i, x + i$, d. h. in der Nähe des bestimmten Werthes x der unabhängigen veränderlichen Grösse stetig seyen; so ist nach §. 110. II., wenn θ und ϱ gewisse positive echte Brüche bezeichnen,

$$f(x - i) = f(x) - i f'(x - \theta i),$$

$$f(x + i) = f(x) + i f'(x + \varrho i).$$

Ist nun $f'(x)$ nicht $= 0$; so haben nach I., weil $x - \theta i$ und $x + \varrho i$ offenbar zwei innerhalb des unendlich kleinen Intervalls $x - i, x + i$ liegende Werthe der unabhängigen veränderlichen Grösse sind, $f'(x - \theta i)$ und $f'(x + \varrho i)$ gleiche Vorzeichen, und es ist folglich mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$f(x - i) \leq f(x), \quad f(x + i) \geq f(x)$$

oder

$$f(x) \geq f(x - i), \quad f(x) \leq f(x + i);$$

also $f(x)$ nach §. 152. weder ein Maximum, noch ein Minimum der gegebenen Function. Soll daher $f(x)$ ein Maximum oder ein Minimum der gegebenen Function seyn; so muss nothwendig

$$f'(x) = 0$$

seyn.

Ist dies der Fall, und ist auch $f''(x)$ eine in dem unendlich kleinen Intervall $x - i, x + i$ stetige Function; so ist nach §. 110. II., wenn θ_1 und ϱ_1 wieder gewisse positive echte Brüche bezeichnen,

$$f(x-i) = f(x) + \frac{i^2}{1 \cdot 2} f''(x - \theta_1 i),$$

$$f(x+i) = f(x) + \frac{i^2}{1 \cdot 2} f''(x + \varrho_1 i).$$

Ist nun $f''(x)$ nicht $= 0$; so haben nach I. $f''(x - \theta_1 i)$ und $f''(x + \varrho_1 i)$ mit einander und mit $f''(x)$ gleiche Vorzeichen. Daher ist, wenn $f''(x)$ positiv ist,

$$f(x-i) > f(x), \quad f(x+i) > f(x)$$

oder

$$f(x) < f(x-i), \quad f(x) < f(x+i),$$

und folglich nach §. 152. in diesem Falle $f(x)$ ein Minimum der gegebenen Function. Ist dagegen $f''(x)$ negativ; so ist

$$f(x-i) < f(x), \quad f(x+i) < f(x)$$

oder

$$f(x) > f(x-i), \quad f(x) > f(x+i),$$

und in diesem Falle folglich $f(x)$ ein Maximum der gegebenen Function. Wenn aber $f''(x) = 0$ und auch $f'''(x)$ in dem unendlich kleinen Intervall $x-i, x+i$ stetig ist; so ist nach §. 110. II., wenn θ_2 und ϱ_2 gewisse positive echte Brüche bezeichnen,

$$f(x-i) = f(x) - \frac{i^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(x - \theta_2 i),$$

$$f(x+i) = f(x) + \frac{i^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(x + \varrho_2 i).$$

Ist nun $f'''(x)$ nicht $= 0$; so haben nach I. $f'''(x - \theta_2 i)$ und $f'''(x + \varrho_2 i)$ gleiche Vorzeichen, und es ist folglich mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$f(x-i) \leq f(x), \quad f(x+i) \geq f(x)$$

oder

$$f(x) \geq f(x-i), \quad f(x) \leq f(x+i);$$

also $f(x)$ nach §. 152. weder ein Maximum, noch ein Minimum der gegebenen Function. Soll daher in diesem Falle, wo $f''(x) = 0$ ist, $f(x)$ ein Maximum oder ein Minimum der gegebenen Function seyn; so muss nothwendig auch

$$f'''(x) = 0$$

seyn.

Ist dies der Fall, und ist dann auch $f^{iv}(x)$ in dem unendlich kleinen Intervall $x-i, x+i$ stetig; so ist nach §. 110. II., wenn θ_3 und ϱ_3 wieder positive echte Brüche bezeichnen,

$$f(x-i) = f(x) + \frac{i^4}{1 \dots 4} f^{iv}(x - \theta_3 i),$$

$$f(x+i) = f(x) + \frac{i^4}{1 \dots 4} f^{iv}(x + \varrho_3 i).$$

Ist nun $f^{iv}(x)$ nicht $= 0$; so haben nach I. $f^{iv}(x - \theta_3 i)$ und

$f^{iv}(x + \varrho_3 i)$ mit einander und mit $f^{iv}(x)$ gleiche Vorzeichen. Daher ist, wenn $f^{iv}(x)$ positiv ist,

$$f(x - i) > f(x), \quad f(x + i) > f(x)$$

oder

$$f(x) < f(x - i), \quad f(x) < f(x + i),$$

und folglich $f(x)$ nach §. 152. ein Minimum der gegebenen Function. Ist dagegen $f^{iv}(x)$ negativ; so ist

$$f(x - i) < f(x), \quad f(x + i) < f(x)$$

oder

$$f(x) > f(x - i), \quad f(x) > f(x + i),$$

und folglich $f(x)$ nach §. 152. ein Maximum der gegebenen Function. Wenn aber $f^{iv}(x) = 0$ und auch $f^v(x)$ in dem unendlich kleinen Intervall $x - i, x + i$ stetig ist; so ist nach §. 110. II.

$$f(x - i) = f(x) - \frac{i^5}{1 \dots 5} f^v(x - \theta_4 i),$$

$$f(x + i) = f(x) + \frac{i^5}{1 \dots 5} f^v(x + \varrho_4 i),$$

wo θ_4 und ϱ_4 wieder positive echte Brüche bezeichnen. Ist nun $f^v(x)$ nicht $= 0$; so haben nach I. $f^v(x - \theta_4 i)$ und $f^v(x + \varrho_4 i)$ gleiche Vorzeichen, und es ist folglich

$$f(x - i) \leq f(x), \quad f(x + i) \geq f(x)$$

oder

$$f(x) \geq f(x - i), \quad f(x) \leq f(x + i);$$

also nach §. 152. $f(x)$ weder ein Maximum, noch ein Minimum der gegebenen Function. Soll daher in diesem Falle, wo $f^{iv}(x) = 0$ ist, $f(x)$ ein Maximum oder ein Minimum der gegebenen Function seyn; so muss nothwendig auch

$$f^v(x) = 0$$

seyn.

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, erhellet hieraus schon deutlich genug. Ueberhaupt ergibt sich aber aus dem Vorhergehenden das folgende wichtige allgemeine Theorem:

Wenn für den bestimmten Werth x der unabhängigen veränderlichen Grösse die Functionen

$$f'(x), f''(x), f'''(x), \dots f^{(n-1)}(x)$$

sämmtlich verschwinden, und, so wie $f(x)$ und $f^{(n)}(x)$, in der Nähe des in Rede stehenden bestimmten Werths der unabhängigen veränderlichen Grösse stetig sind, aber $f^{(n)}(x)$ nicht $= 0$ ist; so ist

1. wenn n eine ungerade Zahl ist, $f(x)$ weder ein Maximum, noch ein Minimum; dagegen ist

2. wenn n eine gerade Zahl ist, $f(x)$ ein Maximum oder ein Minimum, jenachdem $f^{(n)}(x)$ negativ oder positiv ist.

§. 154.

Im Allgemeinen bedient man sich des vorhergehenden Lehrsatzes zur Aufsuchung der grössten und kleinsten Werthe einer Function $f(x)$ auf folgende Art.

Man entwickelt den ersten Differentialquotienten $f'(x)$, setzt

$$f'(x) = 0,$$

und sucht die reellen Wurzeln dieser Gleichung, wenn es deren giebt. Hat dieselbe gar keine reelle Wurzel; so existirt kein reeller Werth von x , für welchen der Differentialquotient $f'(x)$ verschwindet, und es giebt also nach §. 153. auch weder Maxima, noch Minima der gegebenen Function. Ist aber ξ eine reelle Wurzel der Gleichung

$$f'(x) = 0;$$

so setze man dieselbe für x in die Differentialquotienten

$$f''(x), f'''(x), f^{iv}(x), f^v(x), \dots,$$

wodurch man die Reihe

$$f''(\xi), f'''(\xi), f^{iv}(\xi), f^v(\xi), \dots$$

erhält, und bleibe in dieser Reihe bei dem ersten nicht verschwindenden Gliede, wofern es ein solches Glied giebt, stehen. Ist nun $f^{(n)}(\xi)$ dieses erste nicht verschwindende Glied; so ist

1. wenn n eine ungerade Zahl ist, $f(\xi)$ weder ein Maximum, noch ein Minimum der gegebenen Function; dagegen ist

2. wenn n eine gerade Zahl ist, $f(\xi)$ ein Maximum oder ein Minimum der gegebenen Function, jenachdem $f^{(n)}(\xi)$ negativ oder positiv ist.

Dieselbe Untersuchung muss man mit allen reellen Wurzeln der Gleichung $f'(x) = 0$, so viel es deren giebt, anstellen. Uebrigens gilt alles Obige nur unter der Voraussetzung, dass die Functionen

$$f(x), f'(x), f''(x), f'''(x), \dots, f^{(n)}(x)$$

in der Nähe des bestimmten Werths ξ von x stetig sind, wovon man sich also streng genommen in jedem einzelnen Falle besonders überzeugen muss. Jedoch leuchtet die Stetigkeit der in Rede stehenden Functionen in der Nähe des bestimmten Werths ξ der unabhängigen veränderlichen Grösse in den meisten vorkommenden Fällen so leicht und von selbst ein, dass man eine besondere Untersuchung in der angedeuteten Beziehung gewöhnlich nicht anstellt, wenn es nicht anders die Natur der Sache unbedingt fordert.

§. 155.

Bei gebrochenen Functionen kann man sich die Aufsuchung der Maxima und Minima auf folgende Art erleichtern, wobei wir jedoch bloss den Fall näher betrachten wollen, wenn der zweite

Differentialquotient der gegebenen Function in der Reihe der Differentialquotienten der erste ist, welcher für den Werth der unabhängigen veränderlichen Grösse, für welchen der erste Differentialquotient verschwindet, nicht verschwindet.

Sey zu diesem Ende überhaupt $y = \frac{p}{q}$, wo p und q Functionen von x bezeichnen, die gegebene Function; so ist bekanntlich

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{q \frac{\partial p}{\partial x} - p \frac{\partial q}{\partial x}}{q^2},$$

und es ist folglich $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, wenn

$$q \frac{\partial p}{\partial x} - p \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

ist, vorausgesetzt, dass für denselben Werth von x , welcher vorstehender Gleichung genügt, nicht auch q verschwindet. Man wird also jederzeit die reellen Wurzeln der Gleichung

$$q \frac{\partial p}{\partial x} - p \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

aufzusuchen, sich aber zugleich auch bei jeder dieser Wurzeln zu versichern haben, dass für dieselbe q nicht verschwindet. Durch Entwicklung des zweiten Differentialquotienten der gegebenen Function ergibt sich ferner

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{q^2 \left\{ q \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - p \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \right\} - 2 q \left\{ q \frac{\partial p}{\partial x} - p \frac{\partial q}{\partial x} \right\} \frac{\partial q}{\partial x}}{q^4}.$$

Da nun für die nach der vorher gegebenen Anweisung gefundenen Werthe von x

$$q \frac{\partial p}{\partial x} - p \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

ist; so ist für diese Werthe von x

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{q \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - p \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}}{q^2}.$$

Weil es aber bekanntlich bloss darauf ankommt, ob der zweite Differentialquotient für die in Rede stehenden Werthe von x , vorausgesetzt, dass derselbe für diese Werthe von x nicht verschwindet, positiv oder negativ ist; so braucht man, weil q^2 immer positiv ist, diese Werthe bloss in die Grösse

$$q \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - p \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$$

für x zu setzen, und zu untersuchen, ob die entsprechenden Werthe dieser Grösse positiv oder negativ sind. Im ersten Falle wird jederzeit ein Minimum, im zweiten ein Maximum Statt finden.

§. 156.

Die im Vorhergehenden entwickelten allgemeinen Regeln wollen wir nun auf einige Beispiele anwenden.

I. Die Werthe von x zu finden, für welche die Function

$$y = x^2 + 3x + 2$$

ein Maximum oder ein Minimum wird.

Durch Entwicklung des ersten Differentialquotienten ergibt sich

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2x + 3,$$

und man hat folglich zur Bestimmung von x die Gleichung

$$2x + 3 = 0,$$

welche die eine reelle Wurzel $x = -\frac{3}{2}$ hat. Für den zweiten Differentialquotienten erhält man

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 2.$$

Da nun dieser Differentialquotient für jedes x , folglich auch für $x = -\frac{3}{2}$, $= 2$ ist, für den in Rede stehenden Werth von x also nicht verschwindet und positiv ist; so wird die gegebene Function für $x = -\frac{3}{2}$ ein Minimum. Für $x = -\frac{3}{2}$ ist aber $y = -\frac{1}{4}$, und dieser Werth ist also ein Minimum der gegebenen Function y . Andere Minima oder Maxima dieser Function giebt es nicht, weil die Gleichung $2x + 3 = 0$ nur die eine reelle Wurzel $-\frac{3}{2}$ hat.

II. Die Werthe von x zu finden, für welche die Function

$$y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$$

ein Maximum oder ein Minimum wird.

Weil

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24$$

ist; so muss man die reellen Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

aufsuchen. Durch Zerfällung des letzten Gliedes in Factoren findet man in diesem Falle leicht, dass die Gleichung die drei reellen Wurzeln 1, 2, 3 hat. Der zweite Differentialquotient ist

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 12x^2 - 48x + 44,$$

und man müsste also nun die Werthe 1, 2, 3 für x in diesen Differentialquotienten einführen, um zu prüfen, ob derselbe für den einen oder den andern dieser Werthe von x verschwindet, oder einen positiven nicht verschwindenden, oder einen negativen Werth erhält. Man übersieht aber leicht, dass man den Diffe-

rentialquotienten vorher durch 4 dividiren, und die in Rede stehende Prüfung bloss mit der Grösse

$$3x^2 - 12x + 11$$

anstellen kann. Da nun diese Grösse für $x = 1, 2, 3$ respective die Werthe 2, — 1, 2, erhält; so wird y für $x = 1, 2, 3$ respective ein Minimum, Maximum, Minimum. Die den Werthen $x = 1, 2, 3$ entsprechenden Werthe von y sind 3, 4, 3.

III. Die Werthe von x zu finden, für welche die Function

$y = 6x^7 - 70x^6 + 336x^5 - 861x^4 + 1274x^3 - 1092x^2 + 504x - 27$
ein Maximum oder ein Minimum wird.

Entwickelt man den ersten Differentialquotienten und setzt denselben $= 0$; so erhält man, nachdem man mit 42 dividirt hat, die Gleichung

$$x^6 - 10x^5 + 40x^4 - 82x^3 + 91x^2 - 52x + 12 = 0$$

oder

$$(x - 1)^3 (x - 2)^2 (x - 3) = 0,$$

woraus man sieht, dass unsere Gleichung die drei reellen Wurzeln 1, 2, 3 hat.

Für den zweiten Differentialquotienten erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= 84(3x^5 - 25x^4 + 80x^3 - 123x^2 + 91x - 26) \\ &= 84(x - 1)^2 (x - 2)(3x^2 - 13x + 13), \end{aligned}$$

und sieht also, dass dieser Differentialquotient für $x = 1$ und $x = 2$ verschwindet. Für $x = 3$ wird derselbe dagegen $= 336$, und die gegebene Function wird also für $x = 3$ ein Minimum.

Um nun ferner zu entscheiden, ob für $x = 1$ und $x = 2$ Maxima oder Minima Statt finden, muss man den dritten Differentialquotienten

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} &= 84(15x^4 - 100x^3 + 240x^2 - 246x + 91) \\ &= 84(x - 1)(15x^3 - 85x^2 + 155x - 91) \end{aligned}$$

entwickeln.

Da dieser Differentialquotient für $x = 2$ nicht verschwindet; so findet für $x = 2$ weder ein Maximum, noch ein Minimum Statt.

Weil aber für $x = 1$ der dritte Differentialquotient verschwindet; so muss man, um zu entscheiden, ob für diesen Werth von x ein Maximum oder ein Minimum Statt findet, noch den vierten Differentialquotienten

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 168(30x^3 - 150x^2 + 240x - 123)$$

entwickeln. Für $x = 1$ wird dieser Differentialquotient $= -504$, und die gegebene Function für diesen Werth von x also ein Maximum.

Die den Werthen $x = 1$ und $x = 3$, für welche die gegebene Function respective ein Maximum und ein Minimum wird, entsprechenden Werthe von y sind 70 und 54.

IV. Die Werthe von x zu finden, für welche die Function

$$y = \frac{x^3 + x}{x^4 - x^2 + 1}$$

ein Maximum oder ein Minimum wird.

Man setze

$$p = x^3 + x, \quad q = x^4 - x^2 + 1;$$

so ist

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 3x^2 + 1, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = 4x^3 - 2x,$$

und man muss also nach §. 155. x aus der Gleichung

$$(x^4 - x^2 + 1)(3x^2 + 1) - (x^3 + x)(4x^3 - 2x) = 0,$$

d. i.

$$x^6 + 4x^4 - 4x^2 - 1 = 0$$

bestimmen.

Da sich diese Gleichung unter der Form

$$(x^2 - 1)(x^4 + 5x^2 + 1) = 0$$

darstellen lässt; so hat man zur Bestimmung von x die beiden Gleichungen

$$x^2 - 1 = 0, \quad x^4 + 5x^2 + 1 = 0.$$

Aus der ersten ergibt sich $x = \pm 1$; aus der zweiten erhält man

$$x^2 = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2},$$

und folglich

$$x = \sqrt{\frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}}, \quad x = -\sqrt{\frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}}.$$

Da die vier letzten Wurzeln sämtlich imaginär sind; so hat unsere Gleichung bloss die beiden reellen Wurzeln $+1$ und -1 .

Weil nun ferner

$$q \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - p \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = -6x^5 - 16x^3 + 8x$$

ist, und diese Grösse für $x = +1$ und $x = -1$ respective $= -14$ und $= +14$ ist; so wird die gegebene Function für $x = +1$ ein Maximum, für $x = -1$ dagegen ein Minimum.

V. Drei Spieler haben zusammen die Summe a verloren. Der zweite verlor zwei Mal so viel als der erste, und die drei Verluste verhalten sich so, dass ihr Product ein Maximum ist. Wie viel betrug der Verlust eines jeden der drei Spieler?

Ist x der Verlust des ersten, so ist $2x$ der Verlust des zweiten, und folglich $a - 3x$ der Verlust des dritten. Das Product der drei Verluste ist

$$y = 2x^2(a - 3x) = 2ax^2 - 6x^3.$$

Differentiirt man, so erhält man

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 4ax - 18x^2,$$

und hat also zur Bestimmung von x die Gleichung

$$4ax - 18x^2 = (4a - 18x)x = 0,$$

d. i. die beiden Gleichungen

$$x = 0, \quad 4a - 18x = 0,$$

aus denen sich die Werthe $x = 0$ und $x = \frac{2}{9}a$ ergeben.

Der zweite Differentialquotient ist

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 4a - 36x,$$

und erhält also für $x = 0$ und $x = \frac{2}{9}a$ respective die Werthe $4a$ und $-4a$. Daher wird y für $x = 0$ ein Minimum, für $x = \frac{2}{9}a$ dagegen ein Maximum, und man muss folglich den Bedingungen der Aufgabe gemäss $x = \frac{2}{9}a$ setzen. Die Verluste der beiden andern Spieler sind $\frac{4}{9}a$ und $\frac{1}{3}a$.

VI. Einen Werth von x zu finden, für welchen die Function

$$y = x^a e^{-x},$$

wo a eine positive Grösse seyn soll, ein Maximum oder ein Minimum wird.

Es ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = x^a e^{-x} \left(\frac{a}{x} - 1 \right),$$

und dieser Differentialquotient verschwindet also für $x = a$. Für den zweiten Differentialquotienten erhält man

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \left\{ \left(\frac{a}{x} - 1 \right)^2 - \frac{a}{x^2} \right\} y,$$

und für $x = a$ ist also der Werth dieses Differentialquotienten $= -a^{a-1} e^{-a}$, d. i. negativ. Folglich wird für $x = a$ die gegebene Function ein Maximum.

Nach diesen arithmetischen Beispielen wollen wir nun einige geometrische Aufgaben über die Maxima und Minima auflösen.

§. 157.

Aufgabe. Unter allen Dreiecken mit zwei gegebenen Seiten a, b dasjenige zu finden, welches den grössten Flächeninhalt hat.

Auflösung. Die dritte Seite des gesuchten Dreiecks sey x , sein Flächeninhalt sey y . Das Quadrat seiner Höhe in Bezug auf a als Grundlinie ist, wie man leicht findet,

$$\frac{4a^2 b^2 - (a^2 + b^2 - x^2)^2}{4a^2}.$$

Folglich ist

$$y^2 = \frac{1}{16} \{4a^2 b^2 - (a^2 + b^2 - x^2)^2\}$$

oder

$$16 y^2 = 4a^2 b^2 - (a^2 + b^2 - x^2)^2.$$

Differentiirt man nun; so erhält man

$$8y \frac{\partial y}{\partial x} = x(a^2 + b^2 - x^2).$$

Ist aber $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$; so ist auch

$$8y \frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

und x muss folglich aus der Gleichung

$$x(a^2 + b^2 - x^2) = 0,$$

welche sich in die beiden Gleichungen

$$x = 0, \quad a^2 + b^2 - x^2 = 0$$

zerlegen lässt, bestimmt werden. Aus diesen Gleichungen ergeben sich die drei folgenden Werthe von x :

$$x = 0, \quad x = \pm \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Da aber die beiden Werthe

$$x = 0, \quad x = -\sqrt{a^2 + b^2}$$

in dem vorliegenden Falle offenbar nicht zulässig sind; so bleibt bloss der Werth

$$x = \sqrt{a^2 + b^2},$$

und es muss nun untersucht werden, ob für diesen Werth von x der Flächeninhalt ein Maximum wird.

Differentiirt man zu dem Ende die Gleichung

$$8y \frac{\partial y}{\partial x} = x(a^2 + b^2 - x^2);$$

so erhält man

$$8y \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 8 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 = a^2 + b^2 - 3x^2.$$

Weil nun $\frac{\partial y}{\partial x}$ für $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ verschwindet; so ist

$-2(a^2 + b^2)$ der Werth, welchen $8y \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ erhält, wenn man

$x = \sqrt{a^2 + b^2}$ setzt, und $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ erhält also, weil y in dem vor-

liegenden Falle offenbar positiv ist, für den in Rede stehenden Werth von x einen negativen Werth. Daher wird y für $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ in der That ein Maximum.

Nach dem pythagoräischen Lehrsatz ist x die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen beide Catheten a und b sind. Daher hat unter allen Dreiecken mit zwei gegebenen Seiten dasjenige den grössten Flächeninhalt, in welchem diese beiden Seiten einen rechten Winkel mit einander einschliessen.

§. 158.

Aufgabe. Die Summe $2a$ der drei Seiten eines Dreiecks und eine derselben b sey gegeben; wie gross müssen die beiden andern Seiten seyn, wenn der Flächeninhalt des Dreiecks ein Maximum seyn soll?

Auflösung. In Bezug auf die beiden gegebenen Grössen a und b ist bei dieser Aufgabe zuerst zu bemerken, dass dieselben nicht ganz willkürlich sind, sondern dass immer $a > b$ seyn muss, weil die halbe Summe der drei Seiten eines Dreiecks nothwendig immer grösser als jede Seite desselben seyn muss, wie auf folgende Art leicht gezeigt werden kann.

Sind α, β, γ die drei Seiten des Dreiecks; so ist nach einem bekannten geometrischen Satze

$$\beta + \gamma > \alpha,$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten α addirt,

$$\alpha + \beta + \gamma > 2\alpha$$

oder

$$\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) > \alpha,$$

wie behauptet wurde.

Dies vorausgesetzt, sey nun x die eine der beiden andern Seiten des gesuchten Dreiecks; so ist $2a - b - x$ die dritte Seite desselben. Ist ferner y der Flächeninhalt; so ist nach einem sehr bekannten geometrischen Satze

$$y^2 = a(a - b)(a - x)(b - a + x)$$

und folglich

$$2y \frac{\partial y}{\partial x} = a(a - b)(2a - b - 2x),$$

so dass also x offenbar aus der Gleichung

$$2a - b - 2x = 0$$

bestimmt werden muss. Durch Auflösung dieser Gleichung ergibt sich

$$x = \frac{2a - b}{2},$$

und die dritte Seite ist

$$2a - b - x = \frac{2a - b}{2},$$

so dass also das gesuchte Dreieck offenbar ein gleichschenkliges Dreieck seyn muss.

Durch Differentiation erhält man nun ferner aus dem Obigen

$$y \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 = -a(a - b)$$

Nach dem Obigen ist $a > b$. Also ist die Grösse

$$y \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2,$$

und folglich offenbar auch die Grösse $y \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ für jedes x , also auch für

$$x = \frac{2a - b}{2}$$

negativ. Für diesen Werth von x ist aber

$$y = \frac{1}{2} b \sqrt{a(a-b)},$$

wo die Quadratwurzel, der Natur von y gemäss, offenbar positiv genommen werden muss. Also ist für den in Rede stehenden Werth von x der zweite Differentialquotient offenbar negativ, und y wird folglich für diesen Werth von x in der That ein Maximum. Dass das gesuchte Dreieck ein gleichschenkliges ist, ist schon vorher bemerkt worden.

§. 159.

Aufgabe. Unter allen rechtwinkligen Vierecken, welche sich wie $CDEF$ (Fig. 1.) in einen Kreisquadranten ACB beschreiben lassen, dasjenige zu finden, welches den grössten Flächeninhalt hat

Auflösung. Der Radius des Kreisquadranten sey a , die Seite CD des gesuchten rechtwinkligen Vierecks sey x ; so ist $\sqrt{a^2 - x^2}$ die andere Seite dieses Vierecks, und folglich, wenn wir seinen Flächeninhalt, welcher ein Maximum werden soll, durch y bezeichnen,

$$y = x \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Durch Differentiation ergibt sich

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

und folglich zur Bestimmung des x die Gleichung

$$a^2 - 2x^2 = 0,$$

aus der

$$x = \pm \frac{a}{\sqrt{2}},$$

oder, weil x seiner Natur nach offenbar positiv seyn muss,

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

folgt.

Durch Entwicklung des zweiten Differentialquotienten erhält man

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{(2x^2 - 3a^2)x}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}},$$

und für $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ ist also der Werth dieses Differentialquotienten

offenbar negativ. Daher wird für $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ der Flächeninhalt y wirklich ein Maximum.

Weil $CD = \frac{a}{\sqrt{2}}$ und

$$CE = \sqrt{a^2 - CD^2} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{2}a^2} = \frac{a}{\sqrt{2}},$$

also $CD = CE$ ist; so ist das gesuchte rechtwinklige Viereck das in den gegebenen Quadranten beschriebene Quadrat, welches man immer leicht erhalten kann, wenn man den rechten Winkel ACB halbirt.

§. 160.

Aufgabe. Unter allen rechtwinkligen Vierecken, welche sich wie $CDEF$ (Fig. 1.) in einen Kreisquadranten ACB beschreiben lassen, dasjenige zu finden, welches den grössten Umfang hat.

Auflösung. Behält man die in §. 159. gebrauchten Zeichen bei, nur dass jetzt y den Umfang des gesuchten rechtwinkligen Vierecks bezeichnet; so ist

$$y = 2x + 2\sqrt{a^2 - x^2},$$

und folglich

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2(\sqrt{a^2 - x^2} - x)}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Also hat man zur Bestimmung von x die Gleichung

$$\sqrt{a^2 - x^2} - x = 0,$$

aus der sich

$$x = \pm \frac{a}{\sqrt{2}},$$

oder, weil hier wieder x offenbar positiv ist,

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

ergiebt.

Für den zweiten Differentialquotienten erhält man

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = - \frac{2a^2}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}},$$

so dass also der Werth dieses Differentialquotienten für $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ offenbar negativ ist, und für diesen Werth von x folglich y in der That ein Maximum wird. Auch erhellet wie in §. 159., dass das gesuchte rechtwinklige Viereck das in den gegebenen Quadranten beschriebene Quadrat ist.

§. 161.

Aufgabe. In einer Ebene seyen zwei Punkte A, B (Fig. 2.) und eine gerade Linie MN gegeben; man soll in letzterer einen Punkt E so bestimmen, dass die Summe $AE + BE$ der beiden von A und B nach E gezogenen geraden Linien ein Minimum wird.

Auflösung. Um die Lage der gegebenen Punkte A, B und des gesuchten Punktes E gehörig bestimmen zu können, wollen wir die Linie MN als Abscissenaxe eines rechtwinkligen Coordinatensystems, und den Fusspunkt des von A auf MN gefällten Perpendikels als Anfang der Coordinaten annehmen. Die Ordinate des Punktes A in Bezug auf dieses System sey a , die Abscisse und Ordinate des Punktes B seyen c und b , die Abscisse des gesuchten Punktes E sey x , und der Einfachheit wegen wollen wir, was offenbar verstatet ist, annehmen, dass a und c positiv seyen. Nach Principien der analytischen Geometrie ist

$$AE = \sqrt{a^2 + x^2}, \quad BE = \sqrt{b^2 + (c - x)^2},$$

die Quadratwurzeln positiv genommen, und folglich, wenn wir die Summe der Linien AE und BE , welche ein Minimum werden soll, durch y bezeichnen,

$$y = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (c - x)^2};$$

also

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}.$$

Folglich hat man zur Bestimmung von x die Gleichung

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}} = 0,$$

welche, rational gemacht und gehörig reducirt, endlich auf die quadratische Gleichung

$$x^2 + \frac{2a^2c}{b^2 - a^2}x = \frac{a^2c^2}{b^2 - a^2}$$

führt, durch deren Auflösung man

$$x = \pm \frac{ac(b \mp a)}{(b - a)(b + a)},$$

wo die obern und untern Zeichen sich auf einander beziehen, d. i.

$$x = \frac{ac}{b + a} \text{ und } x = -\frac{ac}{b - a},$$

oder

$$x = \frac{ac}{a + b} \text{ und } x = \frac{ac}{a - b}$$

erhält.

Entwickelt man nun den zweiten Differentialquotienten; so erhält man

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{a^2}{(a^2 + x^2)\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{b^2}{\{b^2 + (c - x)^2\}\sqrt{b^2 + (c - x)^2}},$$

und übersieht sogleich, dass derselbe für die beiden obigen Werthe von x positiv ist, so dass also y für jeden dieser beiden Werthe von x ein Minimum wird, welches nach dem, was in §. 152. gesagt worden ist, nicht auffallend seyn kann.

Für

$$x = \frac{ac}{a+b} \text{ und } x = \frac{ac}{a-b}$$

wird aber respective

$$y = (a+b) \sqrt{1 + \left(\frac{c}{a+b}\right)^2}$$

und

$$y = (a-b) \sqrt{1 + \left(\frac{c}{a-b}\right)^2},$$

indem man nämlich, weil die beiden Quadratwurzeln, deren Summe y ist, der Natur der Aufgabe nach stets positiv seyn müssen, in beiden Fällen das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem b positiv oder negativ ist. Ist nun b positiv; so ist von den Grössen

$$(a+b) \sqrt{1 + \left(\frac{c}{a+b}\right)^2}, (a+b) \sqrt{1 + \left(\frac{c}{a-b}\right)^2}$$

offenbar die erste am kleinsten. Dagegen ist, wenn b negativ ist, von den beiden Grössen

$$(a-b) \sqrt{1 + \left(\frac{c}{a+b}\right)^2}, (a-b) \sqrt{1 + \left(\frac{c}{a-b}\right)^2}$$

offenbar die zweite am kleinsten. Folglich muss man, damit y seinen allerkleinsten Werth erhalte, in dem Falle, wo b positiv ist,

$$x = \frac{ac}{a+b};$$

dagegen in dem Falle, wo b negativ ist,

$$x = \frac{ac}{a-b}$$

setzen. Nimmt man also, so wie a und c , auch b immer als positiv an; so wird man, damit y seinen kleinsten Werth erhalte, stets

$$x = \frac{ac}{a+b}$$

zu setzen haben, und aus dieser Formel erhellet auch, dass x nie grösser als c ist.

In Beziehung auf Fig. 2. ist nun

$$AC = a, BD = b, CD = c, CE = x,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$CE = \frac{AC \cdot CD}{AC + BD}$$

oder

$$AC + BD : AC = CD : CE.$$

Also ist nach einem bekannten Satze von den Proportionen:

$$BD : AC = CD - CE : CE,$$

d. i.

$$BD : AC = DE : CE$$

oder

$$AC : CE = BD : DE.$$

Daher sind die beiden rechtwinkligen Dreiecke ACE , BDE einander ähnlich, und folglich die beiden Winkel AEC , BED einander gleich. Also muss der Punkt E jederzeit eine solche Lage in der Linie MN haben, dass die beiden Linien AE und BE gegen dieselbe unter gleichen Winkeln geneigt sind.

Diese Aufgabe bietet zugleich ein Beispiel eines sogenannten *Minimum Minimorum* dar, über dessen allgemeinen Begriff wir hier wohl weiter nichts hinzuzusetzen brauchen.

§. 162.

Aufgabe. Unter allen geraden Cylindern von einem gegebenen cubischen Inhalt a denjenigen zu finden, welcher die kleinste Oberfläche hat.

Auflösung. Setzt man den Halbmesser der Grundfläche des gesuchten Cylinders $= x$, seine Oberfläche $= y$; so ist, wie leicht erhellet,

$$y = \frac{2a}{x} + 2\pi x^2;$$

also

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{2a}{x^2} + 4\pi x.$$

Folglich hat man zur Bestimmung von x die Gleichung

$$-\frac{2a}{x^2} + 4\pi x = 0,$$

aus welcher sich

$$x = \sqrt[3]{\frac{a}{2\pi}}$$

ergiebt. Der zweite Differentialquotient ist

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 4\pi + \frac{4a}{x^3},$$

und ist also für den obigen Werth von x offenbar positiv, so dass y für diesen Werth von x in der That ein Minimum ist.

Die Höhe des Cylinders ist

$$\frac{a}{\pi x^2} = 2\sqrt[3]{\frac{a}{2\pi}},$$

so dass also, für den Fall des Minimums der Oberfläche, die Höhe des Cylinders dem Durchmesser seiner Grundfläche gleich ist.

§. 163.

Aufgabe. Unter allen geraden Cylindern von gegebenem cubischen Inhalt a denjenigen zu finden, bei welchem die Summe der Seitenfläche und der einen Grundfläche ein Minimum ist.

Auflösung. Ist x wieder der Halbmesser der Grundfläche, y die Grösse, welche ein Minimum werden soll; so ist

und folglich $y = \frac{2a}{x} + \pi x^2$

und folglich $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{2a}{x^2} + 2\pi x$.

Also hat man zur Bestimmung von x die Gleichung

$$-\frac{2a}{x^2} + 2\pi x = 0,$$

aus der sich

$$x = \sqrt[3]{\frac{a}{\pi}}$$

ergiebt. Der zweite Differentialquotient ist

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 2\pi + \frac{4a}{x^3}$$

und ist also für den obigen Werth von x offenbar positiv, daher für diesen Werth von x in der That ein Minimum Statt findet.

Die Höhe des Cylinders ist

$$\frac{a}{\pi x^2} = \sqrt[3]{\frac{a}{\pi}}$$

und folglich dem Halbmesser der Grundfläche gleich.

Diese Aufgabe kann bei der Verfertigung der cylindrischen Hohlmaasse Anwendung finden, indem dieselben offenbar dann die vortheilhafteste Gestalt haben werden, wenn zu ihrer Verfertigung, denselben cubischen Inhalt vorausgesetzt, das wenigste Material erforderlich ist.

§. 164.

Aufgabe. Unter allen in eine Kugel mit dem gegebenen Halbmesser r beschriebenen geraden Cylindern denjenigen zu finden, welcher entweder die grösste Seitenfläche oder den grössten körperlichen Inhalt hat.

Auflösung. Man bezeichne in beiden Fällen die Höhe des gesuchten Cylinders durch $2x$, die Seitenfläche durch s , den körperlichen Inhalt durch v . Der Halbmesser der Grundfläche ist, wie leicht erhellet, $= \sqrt{r^2 - x^2}$, und folglich

$$s = 4\pi x \sqrt{r^2 - x^2}, \quad v = 2\pi x (r^2 - x^2);$$

also

$$\frac{\partial s}{\partial x} = 4\pi \frac{r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2\pi(r^2 - 3x^2).$$

Soll nun zuerst s ein Maximum werden; so setze man

$$r^2 - 2x^2 = 0,$$

und bestimme x aus dieser Gleichung. Dies giebt, weil x offenbar positiv seyn muss, $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$. Entwickelt man nun noch

den zweiten Differentialquotienten von s ; so erhält man

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = 4\pi x \frac{2x^2 - 3r^2}{(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

und dieser Differentialquotient wird für den obigen Werth von x also $= -16\pi$, so dass s folglich für $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$ wirklich ein

Maximum wird. Der Inhalt der Seitenfläche des in die Kugel beschriebenen Cylinders, welcher die grösste Seitenfläche hat, findet sich nach dem Obigen leicht $= 2r^2\pi$, d. h. doppelt so gross wie der Inhalt eines grössten Kreises der Kugel.

Soll ferner v ein Maximum werden; so bestimme man x aus der Gleichung

$$r^2 - 3x^2 = 0.$$

Dadurch erhält man $x = \frac{r}{\sqrt{3}}$. Der zweite Differentialquotient von v ist

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -12\pi x,$$

und wird für den obigen Werth von x also $= -\frac{12\pi r}{\sqrt{3}}$, d. i.

negativ, so dass also v für $x = \frac{r}{\sqrt{3}}$ wirklich ein Maximum wird.

Der Inhalt des in die Kugel beschriebenen Cylinders, welcher den grössten körperlichen Inhalt hat, ist $= 4\pi \left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right)^3$, d. h.

drei Mal so gross wie der Inhalt einer Kugel, welche die Höhe des Cylinders zum Durchmesser hat.

§. 165.

Wir wollen nun die allgemeinen Bedingungen des Maximums und Minimums noch auf einen andern Ausdruck bringen, weil derselbe seiner Einfachheit wegen auch gekannt zu seyn verdient, und in manchen Fällen mit besonderm Vortheil angewandt wird.

Das Symbol x möge wieder einen gewissen bestimmten Werth der unabhängigen veränderlichen Grösse, und $f(x)$ den entsprechenden Werth der gegebenen Function bezeichnen. Um

nun zu beurtheilen, ob $f(x)$ vielleicht ein Maximum oder ein Minimum der gegebenen Function ist, kann man auf folgende Art verfahren.

Man lasse x sich um die der Null unendlich nahe kommende Grösse Δx verändern. Ist dann

I. $\Delta f(x)$ für positive und negative, immer als der Null unendlich nahe kommend gedachte, Δx negativ; so ist $f(x)$ ein Maximum. Ist dagegen

II. $\Delta f(x)$ für positive und negative, immer als der Null unendlich nahe kommend gedachte, Δx positiv; so ist $f(x)$ ein Minimum.

Dass alles dieses den oben aufgestellten allgemeinen Begriffen des Maximums und Minimums völlig gemäss ist, fällt sogleich in die Augen.

Weil aber

$$\Delta f(x) = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \Delta x.$$

ist; so lassen sich die obigen Bedingungen des Maximums und Minimums, wie sogleich erhellet, auch auf folgende Art ausdrücken:

I. Wenn für der Null unendlich nahe kommende Δx der Differenzenquotient $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ negativ oder positiv ist, jenachdem Δx positiv oder negativ ist; so ist $f(x)$ ein Maximum.

II. Wenn für der Null unendlich nahe kommende Δx der Differenzenquotient $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ positiv oder negativ ist, jenachdem Δx positiv oder negativ ist; so ist $f(x)$ ein Minimum.

Dies kann man aber auch auf folgende Art ausdrücken:

I. Wenn für der Null unendlich nahe kommende positive oder negative Δx die Grössen Δx und $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ stets ungleiche Vorzeichen haben; so ist $f(x)$ ein Maximum.

II. Wenn für der Null unendlich nahe kommende positive oder negative Δx die Grössen Δx und $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ stets gleiche Vorzeichen haben; so ist $f(x)$ ein Minimum.

Nach dem allgemeinen Begriffe des Differentialquotienten nähern aber die Grössen

$$f'(x + \Delta x) \text{ und } \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

sich desto mehr, je näher Δx der Null kommt, und können einander beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur Δx der

Null nahe genug kommen lässt, woraus sogleich erhellet, dass für der Null unendlich nahe kommende Δx die Grössen

$$f'(x + \Delta x) \text{ und } \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

stets gleiche Vorzeichen haben werden. Daher können die obigen Bedingungen des Maximums und Minimums offenbar auch auf den folgenden Ausdruck gebracht werden.

I. Wenn für der Null unendlich nahe kommende positive oder negative Δx die Grössen Δx und $f'(x + \Delta x)$ stets ungleiche Vorzeichen haben; so ist $f(x)$ ein Maximum.

II. Wenn für der Null unendlich nahe kommende positive oder negative Δx die Grössen Δx und $f'(x + \Delta x)$ stets gleiche Vorzeichen haben; so ist $f(x)$ ein Minimum.

Lässt man endlich i eine unendlich kleine positive Grösse bezeichnen; so kann man diese Bedingungen auch auf folgende Art ausdrücken:

I. Wenn die Grösse $f'(x - i)$ positiv, die Grösse $f'(x + i)$ dagegen negativ ist; so ist $f(x)$ ein Maximum.

II. Wenn die Grösse $f'(x - i)$ negativ, die Grösse $f'(x + i)$ dagegen positiv ist; so ist $f(x)$ ein Minimum.

Da hiernach, wenn $f(x)$ ein Maximum oder ein Minimum ist, $f'(x - i)$ und $f'(x + i)$ stets ungleiche Vorzeichen haben; so ist klar, dass im Falle des Maximums oder Minimums, wenn nur der erste Differentialquotient der gegebenen Function in der Nähe des Werths x ihrer unabhängigen veränderlichen Grösse stetig ist, jederzeit $f'(x) = 0$ seyn muss, wie wir auch schon aus dem Obigen wissen. Auch wird nun leicht erhellen, dass, wenn $f'(x - i)$ und $f'(x + i)$ gleiche Vorzeichen haben, $f(x)$ weder ein Maximum, noch ein Minimum ist.

§. 166.

Die Bedingungen des Maximums und Minimums, so wie sie im vorhergehenden Paragraphen ausgedrückt worden sind, treten oft mit Vortheil an die Stelle der nicht selten weitläufigen und Zeit raubenden Entwicklung des zweiten Differentialquotienten, wie dies z. B. aus der folgenden Aufgabe erhellen wird.

Aufgabe. Unter allen rechtwinkligen Dreiecken mit einer gegebenen Cathete a dasjenige zu finden, in welchem das Verhältniss der Hypotenuse zu der Summe der beiden Catheten ein Maximum ist.

Auflösung. Ist x die andere Cathete des gesuchten Dreiecks; so ist $\sqrt{a^2 + x^2}$ die Hypotenuse desselben, und nach der Bedingung der Aufgabe soll das Verhältniss

$$\sqrt{a^2 + x^2} : a + x,$$

d. i. der Bruch

$$y = \frac{a + x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

ein Maximum werden. Durch Differentiation erhält man

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a(a-x)}{(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}}$$

und x muss also offenbar aus der Gleichung $a-x=0$ bestimmt werden. Die Auflösung dieser Gleichung giebt $x=a$.

Für $y=f(x)$ ist in diesem Falle

$$f'(x) = \frac{a(a-x)}{(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Denkt man sich nun hierin $x=a$ gesetzt und lässt dann x von a an um die unendlich kleine positive Grösse i ab- und zunehmen; so erhellet auf der Stelle, dass $f'(a-i)$ positiv, dagegen $f'(a+i)$ negativ, und folglich nach §. 165. $f(a)$ ein Maximum ist.

Durch Entwicklung des zweiten Differentialquotienten erhält man

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{a(2x^2-3ax-a^2)}{(a^2+x^2)^2\sqrt{a^2+x^2}}$$

und derselbe erhält also für $x=a$ offenbar einen negativen Werth. Daher wird y für $x=a$ ein Maximum, wie wir schon vorher gefunden haben.

Das oben angestellte einfache Raisonnement führt aber in diesem Falle gewiss leichter zum Zweck, wie die Berechnung des zweiten Differentialquotienten.

In §. 159. fanden wir $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ und, wenn wir $y=f(x)$ setzen,

$$f'(x) = \frac{a^2-2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

und es erhellet wieder leicht, dass $f'\left(\frac{a}{\sqrt{2}}-i\right)$ positiv, dagegen $f'\left(\frac{a}{\sqrt{2}}+i\right)$ negativ ist, folglich nach §. 165. ein Maximum Statt findet, wie auch in §. 159. durch Entwicklung des zweiten Differentialquotienten gefunden worden ist.

In §. 163. fanden wir $x = \sqrt[3]{\frac{a}{\pi}}$ und, wenn wir $y=f(x)$ setzen,

$$f'(x) = -\frac{2a}{x^2} + 2\pi x.$$

Für $x = \sqrt[3]{\frac{a}{\pi}}$ verschwindet $f'(x)$. Lassen wir nun x von

$\sqrt[3]{\frac{a}{\pi}}$ an um i abnehmen; so nimmt $\frac{2a}{x^2}$ zu, dagegen $2\pi x$ ab.

Also ist offenbar $f'\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\pi}} - i\right)$ negativ. Lassen wir dagegen

x von $\sqrt[3]{\frac{a}{\pi}}$ an um i zunehmen; so nimmt $\frac{2a}{x^2}$ ab, dagegen

$2\pi x$ zu. Also ist offenbar $f'\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\pi}} + i\right)$ positiv. Folglich

wird nach §. 165. $y = f(x)$ für $x = \sqrt[3]{\frac{a}{\pi}}$ ein Minimum,

wie auch in §. 163. durch Entwicklung des zweiten Differentialquotienten gefunden worden ist.

§. 167.

Die Werthe von x , für welche eine Unterbrechung der Stetigkeit der Function $y = f(x)$ Statt findet, muss man, um zu bestimmen, ob für dieselben, wie es in der That oft der Fall ist, nicht vielleicht wenigstens in gewissem Sinne ein Maximum oder ein Minimum Statt findet, jederzeit besonders untersuchen, wie wir jetzt an ein Paar einfachen Beispielen zeigen wollen.

Ist z. B. $y = \pm \sqrt{x}$; so findet, wenn man sich vorstellt, dass x sich von $-\infty$ bis $+\infty$ stetig verändert, bei dem Uebergange dieser Grösse vom Negativen durch Null zum Positiven offenbar eine Unterbrechung der Stetigkeit der Function y Statt, weil dieselbe dann vom Imaginären zum Reellen übergeht, und wir müssen daher den Werth $x = 0$ in Bezug auf die Maxima und Minima der Function y besonders untersuchen. Setzt man aber zuerst $y = +\sqrt{x}$; so ist klar, dass, wenn man x von 0 an stetig wachsen lässt, auch y von 0 an stetig und fortwährend wachsen wird, und dass daher der dem Werthe $x = 0$ der unabhängigen veränderlichen Grösse entsprechende Werth $y = 0$ der Function $y = +\sqrt{x}$ offenbar in gewissem Sinne als ein Minimum dieser Function betrachtet werden kann, wenn auch freilich der in Rede stehende bestimmte Werth der gegebenen Function eigentlich nicht dem in §. 152. aufgestellten allgemeinen Begriffe des Minimums entspricht, welches aber auch nicht seyn kann; weil dieser allgemeine Begriff des Minimums, eben so wie der in §. 152. aufgestellte allgemeine Begriff des Maximums, als nothwendige völlig unerlässliche Bedingung voraussetzt, dass die Function in der Nähe des Werths ihrer unabhängigen veränderlichen Grösse, für welchen sie ein Maximum oder ein Minimum werden soll, stetig ist. Setzt man ferner $y = -\sqrt{x}$; so nimmt y , wenn man x von 0 an stetig wachsen lässt, stetig und fortwährend ab, und der dem Werthe $x = 0$ entsprechende Werth $y = 0$ der Function $y = -\sqrt{x}$ kann also als ein Maximum dieser Function betrachtet werden.

Für $x = 0$ findet eine Unterbrechung der Stetigkeit der Function $y = \frac{1}{lx}$ Statt. Wir wollen nun annehmen, dass die Grössen x' und x'' beide positiv und beide kleiner als die Einheit seyen, dass aber $x'' > x'$ sey. Weil bekanntlich $x' = e^{lx'}$, $x'' = e^{lx''}$ ist; so ist

$$e^{lx''} > e^{lx'},$$

und folglich

$$e^{-lx''} < e^{-lx'}.$$

Weil aber x' und x'' beide kleiner als die Einheit sind; so sind lx' , lx'' beide negativ, also $-lx'$, $-lx''$ beide positiv. Folglich ist nach dem Vorhergehenden offenbar $-lx'' < -lx'$; also

$$-\frac{1}{lx''} > -\frac{1}{lx'},$$

und daher, weil diese Grössen beide positiv, folglich

$$\frac{1}{lx'} \text{ und } \frac{1}{lx''}$$

beide negativ sind,

$$\frac{1}{lx''} < \frac{1}{lx'}.$$

Hieraus sieht man, dass man den dem Werthe $x = 0$ entsprechenden Werth der gegebenen Function, welcher, wie leicht erhellen wird, ebenfalls $= 0$ zu setzen ist, als ein Maximum dieser Function betrachten kann.

Für $x = 1$ findet ebenfalls eine Unterbrechung der Stetigkeit der Function $y = \frac{1}{lx}$ Statt, und man kann den diesem Werthe der unabhängigen veränderlichen Grösse entsprechenden Werth der Function sowohl $= +\infty$, als auch $= -\infty$ setzen, jenachdem man sich nämlich x von der Einheit an stetig wachsend, oder von der Einheit an stetig abnehmend denkt. Den Werth $+\infty$ hat man offenbar als ein Maximum, den Werth $-\infty$ dagegen als ein Minimum der in Rede stehenden Function zu betrachten.

Der dem Werthe $x = \infty$ entsprechende Werth der Function $y = \frac{1}{lx}$, welcher $= 0$ ist, ist endlich offenbar als ein Minimum dieser Function zu betrachten.

§. 168.

Der in §. 165. bewiesenen Bedingungen des Maximums und Minimums bedient man sich vorzüglich auch, um zu beurtheilen, ob den Werthen der unabhängigen veränderlichen Grösse, bei

denen eine Unterbrechung der Stetigkeit des ersten Differentialquotienten Statt findet, ein Maximum oder ein Minimum der gegebenen Function entspricht, und untersucht in dieser Beziehung vorzugsweise immer die Werthe von x , für welche

$$\frac{1}{f'(x)} = 0$$

ist.

Ist z. B. die Function

$$f(x) = b + c(x - a)^{\frac{2}{3}}$$

gegeben; so ist

$$f'(x) = \frac{2}{3} c(x - a)^{-\frac{1}{3}},$$

und folglich

$$\frac{1}{f'(x)} = \frac{3}{2c}(x - a)^{\frac{1}{3}},$$

eine Grösse, welche für $x = a$ verschwindet. Weil nun

$$f'(a - i) = \frac{2}{3} c(-i)^{-\frac{1}{3}} = - \frac{2c}{3\sqrt[3]{i}},$$

$$f'(a + i) = \frac{2}{3} c(+i)^{-\frac{1}{3}} = + \frac{2c}{3\sqrt[3]{i}}$$

ist; so ist

1. wenn c positiv ist, $f'(a - i)$ negativ, $f'(a + i)$ positiv, also nach §. 165. $f(a)$ ein Minimum; und

2. wenn c negativ ist, $f'(a - i)$ positiv, $f'(a + i)$ negativ, also nach §. 165. $f(a)$ ein Maximum.

B. Entwickelte Functionen mit zwei von einander unabhängigen veränderlichen Grössen.

§. 169.

Es sey $u = f(x, y)$ eine beliebige Function zweier von einander unabhängigen veränderlichen Grössen, und x, y sollen jetzt wieder irgend zwei bestimmte Werthe dieser veränderlichen Grössen, $u = f(x, y)$ also den diesen bestimmten Werthen der veränderlichen Grössen entsprechenden bestimmten Werth der Function bezeichnen. Lässt man nun die in Rede stehenden bestimmten Werthe der veränderlichen Grössen um beliebige unendlich kleine Grössen zu- und abnehmen; so heissen die diesen veränderten Werthen der veränderlichen Grössen entsprechenden Werthe der Function dem Werthe $u = f(x, y)$ benachbarte Werthe derselben, und man sagt nun wieder, dass $u = f(x, y)$ ein grösster oder ein kleinster Werth der Function, oder ein Maximum oder ein Minimum derselben sey, wenn $u = f(x, y)$ respective grösser oder kleiner als alle seine Nachbarwerthe ist. Stetigkeit der Function in der Nähe der be-

stimmten Werthe x, y ihrer veränderlichen Grössen wird hierbei immer vorausgesetzt.

§. 170.

Nach §. 139. ist

$$f(x + \partial x, y + \partial y) = u + F(\varrho),$$

wo ϱ einen positiven echten Bruch bezeichnet, und $F(\varrho)$ aus ∂u erhalten wird, wenn man für x, y respective $x + \varrho \partial x, y + \varrho \partial y$ setzt. Weil nun nach §. 130. bekanntlich

$$\partial u = \frac{\partial u}{\partial x} \partial x + \frac{\partial u}{\partial y} \partial y$$

oder

$$\partial u = f'_x(x, y) \cdot \partial x + f'_y(x, y) \cdot \partial y$$

ist; so ist

$$F(\varrho) = f'_x(x + \varrho \partial x, y + \varrho \partial y) \cdot \partial x + f'_y(x + \varrho \partial x, y + \varrho \partial y) \cdot \partial y;$$

folglich

$$\begin{aligned} & f(x + \partial x, y + \partial y) \\ &= f(x, y) + f'_x(x + \varrho \partial x, y + \varrho \partial y) \cdot \partial x + f'_y(x + \varrho \partial x, y + \varrho \partial y) \cdot \partial y, \end{aligned}$$

und, wenn auch θ einen positiven echten Bruch bezeichnet, ganz eben so

$$\begin{aligned} & f(x - \partial x, y - \partial y) \\ &= f(x, y) - f'_x(x - \theta \partial x, y - \theta \partial y) \cdot \partial x - f'_y(x - \theta \partial x, y - \theta \partial y) \cdot \partial y. \end{aligned}$$

Sind nun die Grössen $f'_x(x, y)$ und $f'_y(x, y)$, die wir in der Nähe der bestimmten Werthe x, y der unabhängigen veränderlichen Grössen als stetig annehmen, nicht beide $= 0$; so haben für der Null unendlich nahe kommende ∂x und ∂y die Grössen

$$\begin{aligned} & f'_x(x + \varrho \partial x, y + \varrho \partial y) \cdot \partial x + f'_y(x + \varrho \partial x, y + \varrho \partial y) \cdot \partial y, \\ & f'_x(x - \theta \partial x, y - \theta \partial y) \cdot \partial x + f'_y(x - \theta \partial x, y - \theta \partial y) \cdot \partial y \end{aligned}$$

offenbar beide mit der Grösse

$$f'_x(x, y) \cdot \partial x + f'_y(x, y) \cdot \partial y$$

gleiches Vorzeichen. Folglich haben, wenn die Grössen $f'_x(x, y)$ und $f'_y(x, y)$ nicht beide $= 0$ sind, die Grössen

$$\begin{aligned} & f'_x(x + \varrho \partial x, y + \varrho \partial y) \cdot \partial x + f'_y(x + \varrho \partial x, y + \varrho \partial y) \cdot \partial y, \\ & f'_x(x - \theta \partial x, y - \theta \partial y) \cdot \partial x + f'_y(x - \theta \partial x, y - \theta \partial y) \cdot \partial y \end{aligned}$$

für der Null unendlich nahe kommende ∂x und ∂y gleiche, die Grössen

$$\begin{aligned} & f'_x(x + \varrho \partial x, y + \varrho \partial y) \cdot \partial x + f'_y(x + \varrho \partial x, y + \varrho \partial y) \cdot \partial y, \\ & -f'_x(x - \theta \partial x, y - \theta \partial y) \cdot \partial x - f'_y(x - \theta \partial x, y - \theta \partial y) \cdot \partial y \end{aligned}$$

also entgegengesetzte Vorzeichen, immer unter der Voraussetzung, dass ∂x und ∂y der Null unendlich nahe kommende Grössen sind.

Sind also die Grössen $f'_x(x, y)$ und $f'_y(x, y)$ nicht beide $= 0$; so ist für der Null unendlich nahe kommende ∂x und ∂y nach dem Obigen

$$f(x + \partial x, y + \partial y) \geq f(x, y),$$

$$f(x - \partial x, y - \partial y) \leq f(x, y),$$

oder

$$f(x, y) \leq f(x + \partial x, y + \partial y),$$

$$f(x, y) \geq f(x - \partial x, y - \partial y),$$

und folglich offenbar $f(x, y)$ weder ein Maximum, noch ein Minimum der gegebenen Function.

Soll also $u = f(x, y)$ ein Maximum oder ein Minimum der gegebenen Function seyn; so muss nothwendig zugleich

$$f'_x(x, y) = 0, f'_y(x, y) = 0,$$

d. i.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

seyn, wo, wie sich von selbst versteht, die Differentialquotienten partielle Differentialquotienten sind.

§. 171.

Nehmen wir nun an, dass

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

ist; so ist auch

$$\partial u = \frac{\partial u}{\partial x} \partial x + \frac{\partial u}{\partial y} \partial y = 0,$$

und folglich nach §. 139.

$$f(x + \partial x, y + \partial y) = u + \frac{F''(\varrho)}{1.2},$$

wo ϱ ein positiver echter Bruch ist, und $F''(\varrho)$ aus $\partial^2 u$ erhalten wird, wenn man für x, y respective $x + \varrho \partial x, y + \varrho \partial y$ setzt.

Da bekanntlich

$$\partial^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \partial x^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \partial x \partial y + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \partial y^2$$

ist; so wird, wenn nur nicht zugleich

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

ist, für der Null unendlich nahe kommende ∂x und ∂y offenbar $F''(\varrho)$ mit $\partial^2 u$ gleiches Vorzeichen haben, was auch übrigens ∂x und ∂y für Vorzeichen haben mögen. Wenn also $\partial^2 u$, wie sich auch ∂x und ∂y ändern mögen, sein Zeichen niemals ändert; so wird, wegen der obigen Gleichung

$$f(x + \partial x, y + \partial y) = u + \frac{F''(\varrho)}{1.2}$$

oder

$$f(x + \partial x, y + \partial y) = f(x, y) + \frac{F''(\varrho)}{1.2},$$

jederzeit $u = f(x, y)$ ein Maximum oder ein Minimum seyn: ein Maximum nämlich, wenn $\partial^2 u$ immer negativ ist; ein Minimum dagegen, wenn $\partial^2 u$ immer positiv ist. Dass nicht zugleich

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

ist, wird hierbei immer vorausgesetzt.

Wir haben also jetzt zunächst zu untersuchen, welche Bedingungen erfüllt seyn müssen, wenn, wie auch ∂x und ∂y sich ändern mögen, die Grösse

$$\partial^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \partial x^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \partial x \partial y + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \partial y^2$$

ihr Zeichen niemals ändern soll.

§. 172.

Ändert die Grösse

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \partial x^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \partial x \partial y + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \partial y^2,$$

ihr Zeichen nicht; so ändert auch die Grösse

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

welche mit jener immer gleiches Vorzeichen hat, ihr Zeichen nicht, und umgekehrt. Änderte aber die letztere Grösse ihr Zeichen; so würde nach einem sehr bekannten Satze aus der Theorie der Gleichungen die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

indem man nämlich $\frac{\partial x}{\partial y}$ als unbekannte Grösse betrachtet, reelle Wurzeln haben. Hat also diese Gleichung keine reelle Wurzel; so ändert die Grösse

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

und folglich auch die Grösse

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \partial x^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \partial x \partial y + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \partial y^2$$

ihr Zeichen niemals. Durch Auflösung der obigen Gleichung ergiebt sich aber

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \pm \sqrt{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}}{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

und es sind also beide Wurzeln der in Rede stehenden Gleichung imaginär, wenn

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0$$

ist. Daher wird also auch, wenn diese Bedingung erfüllt ist, die Grösse

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \partial x^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \partial x \partial y + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \partial y^2$$

ihr Zeichen niemals ändern, und zugleich erhellet auf der Stelle, dass, wenn die obige Bedingung erfüllt ist, die Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ und } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

jederzeit einerlei Vorzeichen haben.

Da nun aber, wenn die Bedingung

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0$$

erfüllt ist, die Grösse

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \partial x^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \partial x \partial y + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \partial y^2,$$

was auch ∂x und ∂y für Werthe haben mögen, immer ein und dasselbe Vorzeichen hat; so erhellet, wenn man nur, wie verstatet ist, $\partial y = 0$ setzt, auf der Stelle, dass diese Grösse immer mit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \partial x^2,$$

also auch mit $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, und nach dem Obigen folglich auch immer mit $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ einerlei Vorzeichen hat, also positiv oder negativ ist, jenachdem die beiden Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ und } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

positiv oder negativ sind.

Weil

$$\partial^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \partial x^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \partial x \partial y + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \partial y^2$$

ist; so ist, wenn

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0$$

ist, auch $\partial^2 u$, was auch ∂x und ∂y für Werthe haben mögen, immer positiv oder immer negativ, jenachdem die Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ und } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

beide positiv oder beide negativ sind.

Fasst man nun, in Verbindung mit §. 170. und §. 171., alles Vorhergehende zusammen, und bemerkt, dass, wenn

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0$$

ist, offenbar auch nie zugleich

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

seyn kann; so ergibt sich unmittelbar das folgende merkwürdige und wichtige Theorem:

Wenn

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

und

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0$$

ist; so ist $u = f(x, y)$ ein Maximum oder ein Minimum, jenachdem die Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ und } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

beide negativ oder beide positiv sind.

Von diesem Satze wollen wir nun einige Anwendungen machen.

§. 173.

Aufgabe. Man soll eine gegebene Zahl a auf eine solche Art in drei Theile theilen, dass das Product der drei Theile ein Maximum wird.

Auflösung. Man bezeichne zwei der gesuchten Theile durch x, y ; so ist $a - x - y$ der dritte Theil, und nach der Bedingung der Aufgabe soll also die Function

$$u = xy(a - x - y)$$

ein Maximum werden. Für die Differentialquotienten erhält man folgende Ausdrücke:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y(a - x - y) - xy = ay - 2xy - y^2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x(a - x - y) - xy = ax - x^2 - 2xy;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = a - 2y - 2x,$$

und hat nun zur Bestimmung von x und y die beiden Gleichungen

$$ay - 2xy - y^2 = 0,$$

$$ax - 2xy - x^2 = 0,$$

oder, weil dem Sinne der Aufgabe nach offenbar weder x , noch $y = 0$ ist:

$$a - 2x - y = 0, \quad a - 2y - x = 0,$$

und folglich $x = y = \frac{1}{3}a$.

Weil nun für diesen gemeinschaftlichen Werth von x und y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{2}{3}a, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{3}a$$

ist; so sind für den gefundenen gemeinschaftlichen Werth von x und y die Differentialquotienten $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ beide negativ.

Ferner ist

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{3}a^2,$$

d. i.

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0.$$

Also wird das Product u für $x = y = \frac{1}{3}a$ wirklich ein Maximum. Der dritte Theil ist $a - x - y = \frac{1}{3}a$, und es müssen folglich, wenn eine gegebene Zahl so in drei Theile getheilt werden soll, dass das Product der drei Theile ein Maximum wird, die drei Theile einander gleich seyn.

Uebrigens werden die beiden Gleichungen

$$ay - 2xy - y^2 = 0, \quad ax - 2xy - x^2 = 0$$

auch erfüllt, wenn man $x = y = 0$ setzt. Dann ist das Product der drei Theile $= 0$, und folglich in diesem Falle offenbar als ein Minimum zu betrachten.

§. 174.

Aufgabe. Unter allen ebenen Dreiecken, welche einen gegebenen Umfang haben, dasjenige zu finden, welches den grössten Flächeninhalt hat.

Auflösung. Setzen wir den gegebenen Umfang $= s$, den Flächeninhalt, welcher ein Maximum werden soll, $= u$, und bezeichnen die drei Seiten des Dreiecks durch x, y, z ; so ist

$$u^2 = \frac{1}{2}s \left(\frac{1}{2}s - x\right) \left(\frac{1}{2}s - y\right) \left(\frac{1}{2}s - z\right),$$

und u ist offenbar ein Maximum, wenn das Product

$$\left(\frac{1}{2}s - x\right) \left(\frac{1}{2}s - y\right) \left(\frac{1}{2}s - z\right)$$

ein Maximum ist. Die Summe der drei Factoren dieses Products ist $\frac{3}{2}s - s = \frac{1}{2}s$, d. i. eine gegebene Grösse. Also reducirt sich die vorgelegte Aufgabe offenbar auf die im vorigen Paragraphen aufgelöste Aufgabe: die gegebene Grösse $\frac{1}{2}s$ in drei Theile zu theilen, deren Product ein Maximum ist, und man muss folglich nach §. 173.

$\frac{1}{2}s - x = \frac{1}{6}s, \frac{1}{2}s - y = \frac{1}{6}s, \frac{1}{2}s - z = \frac{1}{6}s$ setzen, woraus sich $x = y = z = \frac{1}{3}s$, und also der folgende merkwürdige Lehrsatz ergibt:

Unter allen ebenen Dreiecken von gleichem Umfange hat das gleichseitige den grössten Flächeninhalt.

§. 175.

Aufgabe. In der Ebene eines Dreiecks $AA'A''$ einen Punkt O von solcher Lage zu finden, dass die Summe der Entfernungen desselben von den drei Spitzen des Dreiecks ein Minimum ist.

Auflösung. Man nehme in der Ebene des Dreiecks zwei auf einander senkrechte Axen an, und bezeichne die Coordinaten der drei Spitzen A, A', A'' des Dreiecks in Bezug auf diese Axen durch $a, b; a', b'; a'', b''$; die Coordinaten des gesuchten Punktes O in Bezug auf dieselben Axen durch x, y . Sind nun s, s', s'' die Entfernungen des Punktes O von den drei Spitzen des Dreiecks; so ist nach Principien der analytischen Geometrie

$$s = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2},$$

$$s' = \sqrt{(x-a')^2 + (y-b')^2},$$

$$s'' = \sqrt{(x-a'')^2 + (y-b'')^2},$$

die Quadratwurzeln sämmtlich positiv genommen. Nach der Bedingung der Aufgabe soll

$$u = s + s' + s''$$

ein Minimum werden. Um dieser Bedingung zu genügen, muss man x und y aus den beiden Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial s'}{\partial x} + \frac{\partial s''}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial s'}{\partial y} + \frac{\partial s''}{\partial y} = 0$$

bestimmen. Es ist aber, wie man leicht findet,

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{x-a}{s}, \quad \frac{\partial s'}{\partial x} = \frac{x-a'}{s'}, \quad \frac{\partial s''}{\partial x} = \frac{x-a''}{s''};$$

$$\frac{\partial s}{\partial y} = \frac{y-b}{s}, \quad \frac{\partial s'}{\partial y} = \frac{y-b'}{s'}, \quad \frac{\partial s''}{\partial y} = \frac{y-b''}{s''}.$$

Also müssen x und y so bestimmt werden, dass den beiden Gleichungen

$$\frac{x-a}{s} + \frac{x-a'}{s'} + \frac{x-a''}{s''} = 0,$$

$$\frac{y-b}{s} + \frac{y-b'}{s'} + \frac{y-b''}{s''} = 0$$

genügt wird.

Betrachtet man nun die Linien s, s', s'' als die positiven Theile der Abscissenaxen dreier neuen rechtwinkligen Coordinatensysteme, deren Anfangspunkte A, A', A'' sind, und bezeichnet die von s, s', s'' mit der primitiven Abscissenaxe eingeschlossenen Winkel, indem man diese Winkel von dem positiven Theil der primitiven Abscissenaxe an nach dem positiven Theile der primitiven Ordinatenaxe hin von 0 bis 360° zählt, durch $\varphi, \varphi', \varphi''$; so erhält man nach den bekannten Gleichungen der Coordinatenverwandlung, mittelst welcher man von einem rechtwinkligen Systeme zu einem andern rechtwinkligen Systeme überzugehen pflegt, auf der Stelle die folgenden Gleichungen:

$$x = a + s \cos \varphi, \quad x = a' + s' \cos \varphi', \quad x = a'' + s'' \cos \varphi'';$$

$$y = b + s \sin \varphi, \quad y = b' + s' \sin \varphi', \quad y = b'' + s'' \sin \varphi'';$$

oder

$$\frac{x-a}{s} = \cos \varphi, \quad \frac{x-a'}{s'} = \cos \varphi', \quad \frac{x-a''}{s''} = \cos \varphi'';$$

$$\frac{y-b}{s} = \sin \varphi, \quad \frac{y-b'}{s'} = \sin \varphi', \quad \frac{y-b''}{s''} = \sin \varphi''.$$

Also müssen nach dem Obigen x und y so bestimmt werden, oder der Punkt O muss eine solche Lage haben, dass

$$\cos \varphi + \cos \varphi' + \cos \varphi'' = 0, \quad \sin \varphi + \sin \varphi' + \sin \varphi'' = 0$$

ist. Schreibt man diese Gleichungen unter der Form

$$\cos \varphi + \cos \varphi' = -\cos \varphi'', \quad \sin \varphi + \sin \varphi' = -\sin \varphi'',$$

quadriert und addirt sie dann zu einander; so erhält man $\cos(\varphi - \varphi') = -\frac{1}{2}$, und hat also nun überhaupt die drei folgenden Gleichungen:

$$\cos(\varphi - \varphi') = -\frac{1}{2}, \cos(\varphi - \varphi'') = -\frac{1}{2}, \cos(\varphi' - \varphi'') = -\frac{1}{2}.$$

Nimmt man jetzt nach und nach die drei Seiten AA' , $A'A''$, AA'' des gegebenen Dreiecks als Axen, die drei Spitzen A , A' , A'' respective als Anfangspunkte der Abscissen an, und bezeichnet die von den drei Linien s , s' , s'' am Punkte O eingeschlossenen Winkel durch ψ , ψ' , ψ'' ; so erhellet aus dem Vorhergehenden leicht, dass auch

$$\cos \psi = -\frac{1}{2}, \cos \psi' = -\frac{1}{2}, \cos \psi'' = -\frac{1}{2}$$

und folglich $\psi = \psi' = \psi'' = 120^\circ$ seyn, der Punkt O also eine solche Lage haben muss, dass die drei von ihm an die drei Spitzen des Dreiecks gezogenen Linien s , s' , s'' mit einander drei gleiche Winkel einschliessen. Nur entsteht nun noch die Frage, ob, wenn diese Bedingung erfüllt ist, die Summe $s + s' + s''$ auch wirklich, wie die Aufgabe verlangt, ein Minimum ist. Um diese Frage zu beantworten, muss man die Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

entwickeln.

Es ist aber

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{s - (x - a) \frac{\partial s}{\partial x}}{s^2} = \frac{1}{s} \left\{ 1 - \left(\frac{x - a}{s} \right)^2 \right\} = \frac{\sin^2 \varphi}{s},$$

$$\frac{\partial^2 s'}{\partial x^2} = \frac{s' - (x - a') \frac{\partial s'}{\partial x}}{s'^2} = \frac{1}{s'} \left\{ 1 - \left(\frac{x - a'}{s'} \right)^2 \right\} = \frac{\sin^2 \varphi'}{s'},$$

$$\frac{\partial^2 s''}{\partial x^2} = \frac{s'' - (x - a'') \frac{\partial s''}{\partial x}}{s''^2} = \frac{1}{s''} \left\{ 1 - \left(\frac{x - a''}{s''} \right)^2 \right\} = \frac{\sin^2 \varphi''}{s''};$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial y^2} = \frac{s - (y - b) \frac{\partial s}{\partial y}}{s^2} = \frac{1}{s} \left\{ 1 - \left(\frac{y - b}{s} \right)^2 \right\} = \frac{\cos^2 \varphi}{s},$$

$$\frac{\partial^2 s'}{\partial y^2} = \frac{s' - (y - b') \frac{\partial s'}{\partial y}}{s'^2} = \frac{1}{s'} \left\{ 1 - \left(\frac{y - b'}{s'} \right)^2 \right\} = \frac{\cos^2 \varphi'}{s'},$$

$$\frac{\partial^2 s''}{\partial y^2} = \frac{s'' - (y - b'') \frac{\partial s''}{\partial y}}{s''^2} = \frac{1}{s''} \left\{ 1 - \left(\frac{y - b''}{s''} \right)^2 \right\} = \frac{\cos^2 \varphi''}{s''};$$

folglich

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\sin \varphi^2}{s} + \frac{\sin \varphi'^2}{s'} + \frac{\sin \varphi''^2}{s''},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\cos \varphi^2}{s} + \frac{\cos \varphi'^2}{s'} + \frac{\cos \varphi''^2}{s''}.$$

Ferner ist

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x \partial y} = -\frac{(y-b) \frac{\partial s}{\partial x}}{s^2} = -\frac{(x-a)(y-b)}{s^3} = -\frac{\cos \varphi \sin \varphi}{s},$$

$$\frac{\partial^2 s'}{\partial x \partial y} = -\frac{(y-b') \frac{\partial s'}{\partial x}}{s'^2} = -\frac{(x-a')(y-b')}{s'^3} = -\frac{\cos \varphi' \sin \varphi'}{s'},$$

$$\frac{\partial^2 s''}{\partial x \partial y} = -\frac{(y-b'') \frac{\partial s''}{\partial x}}{s''^2} = -\frac{(x-a'')(y-b'')}{s''^3} = -\frac{\cos \varphi'' \sin \varphi''}{s''},$$

und folglich

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\cos \varphi \sin \varphi}{s} - \frac{\cos \varphi' \sin \varphi'}{s'} - \frac{\cos \varphi'' \sin \varphi''}{s''}.$$

Hieraus ergibt sich durch leichte Rechnung

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$= -\frac{\sin(\varphi - \varphi')^2}{ss'} - \frac{\sin(\varphi - \varphi'')^2}{ss''} - \frac{\sin(\varphi' - \varphi'')^2}{s's''};$$

also

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0.$$

Nimmt man hierzu nun noch, dass die Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ und } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

nach dem Obigen beide positiv sind; so ist klar, dass die Summe $s + s' + s''$ ein Minimum ist, wenn der Punkt Q die angegebene Lage hat.

Denkt man sich den Punkt O auf die angegebene Art bestimmt; so fällt zuvörderst auf der Stelle in die Augen, dass dieser Punkt, wenn überhaupt eine solche Bestimmung möglich ist, jederzeit innerhalb des Dreiecks $AA'A''$ liegt. Dann erhellet aber auch leicht, dass z. B.

$$A'O A'' = A' A A'' + A A' O + A A' O,$$

d. i.

$$A' A A'' + A A' O + A A' O = 120^\circ$$

ist, und der Winkel $A' A A''$ folglich nicht grösser als 120° seyn kann. Da nun dasselbe auch von den Winkeln $A A' A''$ und $A A'' A'$

des gegebenen Dreiecks gilt; so ist klar, dass, wenn eine Bestimmung des Punktes O auf die angegebene Art möglich seyn soll, kein Winkel des gegebenen Dreiecks grösser als 120° seyn darf.

Durch Construction findet man den Punkt O leicht, wenn man über zwei Seiten des gegebenen Dreiecks zwei Kreisabschnitte beschreibt, deren jeder einen Winkel von 120° fasst. Der Durchschnittspunkt der Bogen dieser beiden Kreisabschnitte wird dann jederzeit, wenn es überhaupt einen Punkt von der verlangten Beschaffenheit giebt, diesen Punkt bestimmen.

Wir wollen nun noch die Entfernungen $OA=s$, $OA'=s'$, $OA''=s''$ des Punktes O von den drei Spitzen des gegebenen Dreiecks durch die Seiten dieses Dreiecks, welche, so wie sie den Spitzen A , A' , A'' gegenüber stehen, respective durch α , β , γ bezeichnet werden mögen, auszudrücken suchen.

Weil $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$ ist; so ist nach Principien der ebenen Trigonometrie

$$OA^2 + OA'^2 + OA \cdot OA' = AA'^2,$$

$$OA''^2 + OA^2 + OA'' \cdot OA = AA''^2,$$

$$OA'^2 + OA''^2 + OA' \cdot OA'' = A'A''^2;$$

d. i.

$$s^2 + s'^2 + ss' = \gamma^2,$$

$$s''^2 + s^2 + s's = \beta^2,$$

$$s'^2 + s''^2 + s's' = \alpha^2.$$

Subtrahiren wir die dritte dieser Gleichungen von der ersten und zweiten; so erhalten wir

$$(s-s'')(s+s'+s'') = \gamma^2 - \alpha^2,$$

$$(s-s')(s+s'+s'') = \beta^2 - \alpha^2,$$

und folglich, wenn wir der Kürze wegen $s+s'+s'' = \Sigma$ setzen,

$$s-s'' = \frac{\gamma^2 - \alpha^2}{\Sigma}, \quad s-s' = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\Sigma}.$$

Addiren wir nun zu der Summe dieser beiden Gleichungen noch die identische Gleichung $s-s=0$; so erhalten wir

$$3s - \Sigma = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha^2}{\Sigma},$$

und folglich, zugleich mit gehöriger Vertauschung der Buchstaben:

$$s = \frac{\Sigma^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha^2}{3\Sigma}, \quad s' = \frac{\Sigma^2 + \alpha^2 + \gamma^2 - 2\beta^2}{3\Sigma},$$

$$s'' = \frac{\Sigma^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2\gamma^2}{3\Sigma}.$$

Bezeichnet man den Flächeninhalt des gegebenen Dreiecks durch Δ ; so ist, wie leicht erhellen wird,

$$(ss' + ss'' + s's'') \sin 120^\circ = 2\Delta,$$

d. i., weil $\sin 120^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ist,

$$3(ss' + ss'' + s's'') = 4\Delta\sqrt{3},$$

und man hat also jetzt die vier folgenden Gleichungen:

$$s^2 + s'^2 + ss' = \gamma^2,$$

$$s''^2 + s^2 + s''s = \beta^2,$$

$$s'^2 + s''^2 + s's'' = \alpha^2,$$

$$3(ss' + ss'' + s's'') = 4\Delta\sqrt{3}.$$

Durch Addition dieser vier Gleichungen ergibt sich auf der Stelle

$$2(s + s' + s'')^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 4\Delta\sqrt{3},$$

d. i.

$$\Sigma = \sqrt{\frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + 2\Delta\sqrt{3}}.$$

Nach gehöriger Substitution erhält man nun:

$$s = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2 + \frac{4}{3}\Delta\sqrt{3}}{2\sqrt{\frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + 2\Delta\sqrt{3}}},$$

$$s' = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2 + \frac{4}{3}\Delta\sqrt{3}}{2\sqrt{\frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + 2\Delta\sqrt{3}}},$$

$$s'' = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 + \frac{4}{3}\Delta\sqrt{3}}{2\sqrt{\frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + 2\Delta\sqrt{3}}}.$$

Weil man bekanntlich Δ durch α, β, γ ausdrücken kann; so kann man nun auch s, s', s'' durch α, β, γ ausdrücken, wie verlangt wurde.

Zwölftes Kapitel.

Von der Verwechslung oder Vertauschung der unabhängigen veränderlichen Grösse.

§. 176.

Wir wollen annehmen, dass y eine Function von x und

$$v = f\left(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}, \dots, \frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right)$$

ein, ausser gewissen Constanten, die Grössen x, y und die Differentialquotienten von y in Bezug auf x bis zum n ten enthaltender belie-

biger analytischer Ausdruck sey. Ist nun aber x selbst eine Function einer neuen veränderlichen Grösse t , oder soll x wenigstens als Function einer neuen veränderlichen Grösse t betrachtet werden; so kann man fragen, was man für

$$\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}, \dots, \frac{\partial^n y}{\partial x^n}$$

setzen, oder wie überhaupt die Grösse V umgeformt werden muss, wenn dieselbe auf die Grösse t als unabhängige veränderliche Grösse bezogen werden soll. Diese Frage wollen wir jetzt zu beantworten suchen.

§. 177.

Nach dem in §. 43. bewiesenen, in vieler Beziehung wichtigen Satze erhält man durch successive Differentiation leicht:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2,$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial t^3} = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3 x}{\partial t^3} + 3 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^3,$$

u. s. w.

u. s. w.

Bestimmt man nun aus diesen Gleichungen umgekehrt

$$\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}, \dots;$$

so erhält man

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\frac{\partial x}{\partial t}}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2} - \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\frac{\partial x}{\partial t}} \cdot \frac{\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2},$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} =$$

$$\frac{\frac{\partial^3 y}{\partial t^3}}{\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^3} - 3 \frac{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2} \cdot \frac{\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2} + 3 \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\frac{\partial x}{\partial t}} \cdot \frac{\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right)^2}{\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^4} - \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\frac{\partial x}{\partial t}} \cdot \frac{\frac{\partial^3 x}{\partial t^3}}{\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^3},$$

u. s. w.

u. s. w.

und dies sind die Ausdrücke, welche man für

$$\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}, \dots$$

in die Grösse V einführen muss, wenn dieselbe auf t als unabhängige veränderliche Grösse bezogen werden soll.

Uebrigens erhellet leicht, dass man in diesen Ausdrücken gleiche in den Zählern und Nennern der einzelnen Brüche vorkommende Potenzen von ∂t gegen einander aufheben kann, so dass also, wenn V auf t als unabhängige veränderliche Grösse bezogen werden soll, für $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$, ... respective die Ausdrücke

$$\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - 3 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 x^2}{\partial x^4} - \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3 x}{\partial x^3},$$

u. s. w.

gesetzt werden müssen, wobei aber zu bemerken ist, dass in diesen Ausdrücken x und y als Functionen einer neuen beliebigen veränderlichen Grösse zu betrachten, und ∂x , $\partial^2 x$, $\partial^3 x$, ...; ∂y , $\partial^2 y$, $\partial^3 y$, ... die Differentiale dieser Functionen in Bezug auf die in Rede stehende neue unabhängige veränderliche Grösse sind.

§. 178.

Ein allgemeines Bildungsgesetz der im vorigen Paragraphen gefundenen Ausdrücke lässt sich auf folgende sehr einfache Art angeben.

Nach §. 177. hat man für den ersten Differentialquotienten $\frac{\partial y}{\partial x}$ der Function y in Bezug auf x als unabhängige veränderliche Grösse den Quotienten $\partial y : \partial x$ der Differentiale von y und x in Bezug auf t als unabhängige veränderliche Grösse, wenn man nämlich y und x als Functionen von t betrachtet, oder, wie man dies der Kürze wegen ganz zweckmässig zu bezeichnen pflegt, die Grösse $\frac{1}{\partial x} \partial y$ zu setzen. Daher hat man für die Differentialquotienten

$$\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}, \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}, \dots$$

von y in Bezug auf x als unabhängige veränderliche Grösse offenbar überhaupt respective die Grössen

$$\frac{1}{\partial x} \partial y, \frac{1}{\partial x} \partial \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right), \frac{1}{\partial x} \partial \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right), \frac{1}{\partial x} \partial \left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \right), \dots ;$$

also die Grössen

$$\frac{1}{\partial x} \partial y,$$

$$\frac{1}{\partial x} \partial \left(\frac{1}{\partial x} \partial y \right),$$

$$\frac{1}{\partial x} \partial \left(\frac{1}{\partial x} \partial \left(\frac{1}{\partial x} \partial y \right) \right),$$

$$\frac{1}{\partial x} \partial \left(\frac{1}{\partial x} \partial \left(\frac{1}{\partial x} \partial \left(\frac{1}{\partial x} \partial y \right) \right) \right),$$

u. s. w.

deren Bildungsgesetz sogleich in die Augen fällt, zu setzen. Nie darf man aber vergessen, dass in diesen Ausdrücken x und y als Functionen einer neuen beliebigen unabhängigen veränderlichen Grösse zu betrachten, und auch alle Differentiale von x und y in Bezug auf diese neue unabhängige veränderliche Grösse zu nehmen sind.

§. 179.

Oft kommt auch der Fall vor, dass, statt dass vorher y als Function von x betrachtet wurde, umgekehrt x als Function von y betrachtet werden soll. In einem solchen Falle ist also die vorher durch t bezeichnete willkürliche veränderliche Grösse $= y$ zu setzen, und in den Ausdrücken

$$\frac{1}{\partial x} \partial y,$$

$$\frac{1}{\partial x} \partial \left(\frac{1}{\partial x} \partial y \right),$$

$$\frac{1}{\partial x} \partial \left(\frac{1}{\partial x} \partial \left(\frac{1}{\partial x} \partial y \right) \right),$$

$$\frac{1}{\partial x} \partial \left(\frac{1}{\partial x} \partial \left(\frac{1}{\partial x} \partial \left(\frac{1}{\partial x} \partial y \right) \right) \right),$$

u. s. w.

muss man also ∂y als constant betrachten, folglich die Differentiale $\partial^2 y, \partial^3 y, \partial^4 y, \partial^5 y, \dots$ sämmtlich $= 0$ setzen. Entwickelt man unter dieser Voraussetzung die vorhergehenden Ausdrücke; so findet man leicht, dass man, wenn x als Function von y betrachtet werden soll, statt der Differentialquotienten $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}, \dots$ respective

$$\frac{\partial y}{\partial x}, - \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial x^2}, 3 \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 x^2}{\partial x^4} - \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3 x}{\partial x^3}, \dots$$

oder

$$\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial y}}, - \frac{\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)^3}, - \frac{\frac{\partial^3 x}{\partial y^3}}{\left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)^4} + 3 \frac{\left(\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} \right)^2}{\left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)^5}, \dots$$

setzen muss.

Ist z. B. $y = \sin x$; so ist bekanntlich

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \cos x, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\sin x.$$

Will man nun x als Function von y betrachten; so muss man nach dem Vorhergehenden für die Differentialquotienten $\frac{\partial y}{\partial x}$ und $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ respective $\frac{\partial y}{\partial x}$ und $-\frac{\partial y \partial^2 x}{\partial x^3}$ setzen. Dadurch erhält man

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \cos x, \quad \frac{\partial y \partial^2 x}{\partial x^3} = \sin x;$$

oder

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \cos x, \quad \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3 \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = \sin x;$$

oder

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \cos x, \quad \cos x^3 \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = \sin x;$$

oder

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{\cos x}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = \frac{\sin x}{\cos x^3}.$$

Weil nun $x = \text{Arcsin } y$, $\cos x = \sqrt{1-y^2}$ ist; so erhält man

$$\frac{\partial \text{Arcsin } y}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad \frac{\partial^2 \text{Arcsin } y}{\partial y^2} = \frac{y}{(1-y^2)\sqrt{1-y^2}},$$

wo $\sqrt{1-y^2}$ offenbar positiv oder negativ zu nehmen ist, je nachdem $\cos x = \cos(\text{Arcsin } y)$ positiv oder negativ ist.

Setzt man nun x für y ; so erhält man die Formeln

$$\frac{\partial \text{Arcsin } x}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{\partial^2 \text{Arcsin } x}{\partial x^2} = \frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}},$$

in denen $\sqrt{1-x^2}$ positiv oder negativ zu nehmen ist, je nachdem $\cos(\text{Arcsin } x)$ positiv oder negativ ist. Die erste dieser beiden Formeln ist schon aus §. 68. bekannt, und auch die zweite würde sich mittelst der gewöhnlichen Regeln der Differentiation leicht entwickeln lassen.

Dreizehntes Kapitel.

Einige der wichtigsten Anwendungen der Differentialrechnung auf die Theorie der in einer Ebene liegenden Curven oder der sogenannten Curven von einfacher Krümmung.

A. Tangenten der Curven.

§. 180.

Erklärung. Die gerade Linie, welche unter allen geraden Linien, die sich durch einen beliebigen Punkt einer Curve ziehen lassen, in der Nähe dieses Punktes am genauesten mit der Curve zusammenfällt oder sich am nächsten an die Curve anschliesst, heisst die Tangente der Curve in dem in Rede stehenden Punkte, und dieser Punkt selbst wird der Berührungspunkt der Tangente mit der Curve genannt.

Errichtet man durch einen beliebigen Punkt einer Curve auf die durch denselben gezogene Tangente der Curve ein Perpendikel; so heisst dieses Perpendikel die Normale der Curve in dem in Rede stehenden Punkte.

Wir bemerken hierbei, dass wir, wie auch schon die Ueberschrift dieses Kapitels anzeigt, in demselben bloss in einer Ebene liegende Curven oder sogenannte Curven von einfacher Krümmung betrachten werden, und dass also auch alle Constructionen in der Ebene, in welcher die gegebene Curve liegt, ausgeführt gedacht werden müssen.

§. 181.

Aufgabe. Die Gleichung der Tangente einer gegebenen Curve für einen gegebenen Punkt derselben zu finden.

Auflösung. Die Gleichung der gegebenen Curve in Beziehung auf beliebige recht- oder schiefwinklige Coordinaten sey

$$1. \quad y = f(x);$$

die Coordinaten des in dieser Curve gegebenen Punktes, durch welchen die Tangente gezogen werden soll, wollen wir durch x , y , diesen Punkt selbst also nach einem aus der analytischen Geometrie bekannten Gebrauche durch xy bezeichnen.

Lässt man nun x sich um die beliebige Grösse Δx ändern, so wird y sich um Δy ändern. Die Gleichung der durch die Endpunkte der beiden Ordinaten y und $y + \Delta y$ bestimmten geraden Linie, welche als eine Sehne der gegebenen Curve zu betrach-

ten ist, hat nach Principien der analytischen Geometrie die allgemeine Form

$$2. \quad u = Az + B.$$

Da diese gerade Linie, welche wir im Folgenden der Kürze wegen durch AB bezeichnen wollen, durch den Punkt xy geht; so ist auch

$$3. \quad y = Ax + B,$$

und folglich, wenn man diese Gleichung von der Gleichung 2. subtrahirt,

$$4. \quad u - y = A(z - x).$$

Weil aber die gerade Linie AB auch durch den durch die Coordinaten $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ bestimmten Punkt geht; so ist ferner

$$y + \Delta y - y = A(x + \Delta x - x),$$

d. i.

$$5. \quad \Delta y = A\Delta x, \quad A = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Folglich ist nach 4.

$$6. \quad u - y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(z - x)$$

die Gleichung der geraden Linie AB .

Lässt man nun Δx sich der Null immer mehr und mehr nähern; so wird die Linie AB in der Nähe des Punktes xy offenbar immer genauer und genauer mit der gegebenen Curve zusammenfallen, oder sich immer näher und näher an dieselbe anschliessen, und dabei wird sich zugleich der Bruch $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ dem Differentialquotienten $\frac{\partial y}{\partial x}$ als seiner Gränze immer mehr und mehr und auch, wenn man nur Δx nahe genug bei Null annimmt, bis zu jedem beliebigen Grade nähern. Hieraus ergibt sich, dass man die Gleichung der geraden Linie, welche unter allen geraden Linien, die sich durch den Punkt xy ziehen lassen, in der Nähe dieses Punktes sich am nächsten an die gegebene Curve anschliesst, d. i. die gesuchte Gleichung der durch den Punkt xy an die gegebene Curve gezogenen Tangente erhalten wird, wenn man in der Gleichung 6. statt des Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ den Differentialquotienten $\frac{\partial y}{\partial x}$ setzt, so dass also

$$7. \quad u - y = \frac{\partial y}{\partial x}(z - x)$$

die gesuchte Gleichung der durch den Punkt xy an die gegebene Curve gezogenen Tangente seyn wird.

Dass die durch die Gleichung 7. characterisirte gerade Linie sich unter allen geraden Linien, die sich durch den Punkt xy ziehen lassen, in der Nähe dieses Punktes am nächsten an die gegebene Curve anschliesst, lässt sich noch strenger wie vorher auf folgende Art beweisen.

Man denke sich durch den Punkt xy noch eine beliebige andere, von der durch die Gleichung 7. characterisirten geraden Linie verschiedene gerade Linie gezogen, deren Gleichung

$$8. \quad u - y = P(z - x)$$

seyn, und die der Kürze wegen im Folgenden durch $A''B''$ bezeichnet werden mag. Die durch die Gleichung 7. characterisirte gerade Linie mag im Folgenden der Kürze wegen auf ähnliche Art durch $A'B'$ bezeichnet werden.

Die der Abscisse $x + \Delta x$ entsprechenden Ordinaten der gegebenen Curve, der geraden Linie $A'B'$ und der geraden Linie $A''B''$ seyen respective y' , y'' , y''' ; so ist wegen der Gleichungen 7., 8. und 1.

$$9. \quad y' - y = f'(x) \cdot \Delta x, \quad 10. \quad y''' - y = P \Delta x.$$

Ferner ist nach §. 110. II.

$$11. \quad y' - y = f'(x) \cdot \Delta x + \frac{1}{2} f''(x + \varrho \Delta x) \cdot \Delta x^2,$$

wo ϱ einen positiven echten Bruch bezeichnet, und $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ in dem Intervall x , $x + \Delta x$ stetig seyn müssen. Folglich ist nach 9. und 11., und 10. und 11., wie man durch Subtraction dieser Gleichungen leicht findet,

$$12. \quad y' - y'' = \frac{1}{2} f''(x + \varrho \Delta x) \cdot \Delta x^2,$$

$$13. \quad y' - y''' = \{f'(x) - P + \frac{1}{2} f''(x + \varrho \Delta x) \cdot \Delta x\} \Delta x,$$

wo $f'(x) - P$ nicht $= 0$ ist, da $f'(x)$ nicht $= P$ seyn kann, weil wir angenommen haben, dass die Linie $A'B'$ von der Linie $A''B''$ verschieden sey, so dass also auch die Gleichungen 7. und 8. nicht identisch seyn können, welches der Fall seyn würde, wenn $f'(x) = P$ wäre.

Ist nun der absolute Werth von

$$\frac{1}{2} f''(x + \varrho \Delta x) \cdot \Delta x$$

kleiner als der absolute Werth von

$$f'(x) - P + \frac{1}{2} f''(x + \varrho \Delta x) \cdot \Delta x;$$

so ist offenbar auch der absolute Werth von $y' - y''$ kleiner als der absolute Werth von $y' - y'''$. Lässt man aber Δx sich der Null nähern; so wird sich, weil ϱ ein positiver echter Bruch ist, die Grösse $f''(x + \varrho \Delta x)$ immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade dem Differentialquotienten $f''(x)$, die Grösse $f''(x + \varrho \Delta x) \cdot \Delta x$ sich also immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade der Null nähern. Nimmt man nun, was offenbar immer möglich ist, Δx so nahe bei Null, dass für alle der Null noch näher kommende Δx der absolute Werth von

$$f''(x + \varrho \Delta x) \cdot \Delta x$$

kleiner als der absolute Werth von

$$f'(x) - P$$

ist; so ist für alle in Rede stehende Δx der absolute Werth von

$$\frac{1}{2}f''(x + \varrho \Delta x) \cdot \Delta x$$

offenbar kleiner als der absolute Werth von

$$f'(x) - P + \frac{1}{2}f''(x + \varrho \Delta x) \cdot \Delta x,$$

und nach dem Obigen folglich der absolute Werth von $y' - y''$ kleiner als der absolute Werth von $y' - y'''$, woraus sich unmittelbar ergibt, dass durch den Punkt xy keine gerade Linie gezogen werden kann, welche in der Nähe dieses Punktes zwischen der gegebenen Curve und der geraden Linie $A'B'$ liegt, so dass also diese durch die Gleichung 7. characterisirte gerade Linie sich offenbar unter allen durch den Punkt xy gehenden geraden Linien in der Nähe dieses Punktes am nächsten an die gegebene Curve anschliesst, und folglich die Tangente dieser Curve in dem gegebenen Punkte xy ist, wie bewiesen werden sollte.

Ueberblickt man die vorhergehenden Schlüsse nochmals im Zusammenhange; so wird man sich auf der Stelle überzeugen, dass denselben als nothwendige Bedingung die Voraussetzung zum Grunde liegt, dass die Grössen $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ in der Nähe von x , d. i. in der Nähe des Punktes xy , stetig sind, und also auch sämmtlich endliche reelle völlig bestimmte Werthe haben, eine Bedingung, die im Folgenden immer als erfüllt angenommen werden soll.

Anmerkung. Mit Hülfe der bekannten Elementar-Aufgaben der analytischen Geometrie wird es nun auch leicht seyn, die beiden folgenden Aufgaben aufzulösen:

1. Die Gleichung einer geraden Linie zu finden, welche eine gegebene Curve berührt, und durch einen nicht in derselben liegenden gegebenen Punkt geht.

2. Die Gleichung einer geraden Linie zu finden, welche eine gegebene Curve berührt, und einer der Lage nach gegebenen geraden Linie parallel ist.

§. 182.

Zusatz. Bezeichnen wir den Coordinatenwinkel durch α , den von dem auf der positiven Seite der Abscissenaxe liegenden Theile der durch den Punkt xy der gegebenen Curve an dieselbe gezogenen Tangente mit der Richtung der positiven Abscissen eingeschlossenen, zwei rechte Winkel nicht übersteigenden Winkel durch φ ; so ist wegen der Gleichung 7. des vorhergehenden Paragraphen nach Principien der analytischen Geometrie

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\sin \varphi}{\sin(\alpha - \varphi)};$$

und folglich, wenn $\alpha = 90^\circ$ ist, d. i. die Coordinaten rechtwinklige sind,

$$\tan \varphi = \frac{\partial y}{\partial x}.$$

§. 183.

Aufgabe. Unter Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten die Gleichung der Normale einer gegebenen Curve für einen gegebenen Punkt derselben zu finden.

Auflösung. Der Punkt der gegebenen Curve, durch welchen die Normale gezogen werden soll, sey xy . Ist nun

$$1. \quad u = Ax + B$$

die gesuchte Gleichung der Normale; so ist, weil dieselbe durch den Punkt xy gehen soll,

$$2. \quad y = Ax + B,$$

und folglich, wenn man diese Gleichung von der Gleichung 1. subtrahirt,

$$3. \quad u - y = A(z - x).$$

Nach §. 181. ist

$$u - y = \frac{\partial y}{\partial x} (z - x)$$

die Gleichung der durch den Punkt xy gehenden Tangente der gegebenen Curve. Also ist, weil die Tangente auf der Normale senkrecht ist, nach den Elementen der analytischen Geometrie

$$4. \quad 1 + A \frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

Eliminirt man nun A aus den Gleichungen 3. und 4.; so ergibt sich als Gleichung der Normale die Gleichung

$$5. \quad u - y = - \frac{\partial x}{\partial y} (z - x).$$

§. 184.

Zusatz. Bezeichnen wir den von dem auf der positiven Seite der Abscissenaxe liegenden Theile der Normale mit der Richtung der positiven Abscissen eingeschlossenen, zwei rechte Winkel nicht übersteigenden Winkel durch ψ ; so ist nach Principien der analytischen Geometrie wegen der Gleichung 5. im vorigen Paragraphen, weil die Coordinaten rechtwinklig angenommen worden sind,

$$\text{tang } \psi = - \frac{\partial x}{\partial y}.$$

§. 185.

Erklärung. Die Abscisse des Fusspunktes der Ordinate y einer gegebenen Curve, in Bezug auf den Durchschnittspunkt der durch den Punkt xy der gegebenen Curve gezogenen Tangente derselben mit der Abscissenaxe als Anfang der Abscissen, heisst die Subtangente der gegebenen Curve für den Punkt xy .

Die Abscisse des Durchschnittspunktes der durch den Punkt xy einer gegebenen Curve gezogenen Normale derselben mit der Abscissenaxe, in Bezug auf den Fusspunkt der Ordinate y als Anfang der Abscissen, heisst die Subnormale der gegebenen Curve für den Punkt xy .

§. 186.

Aufgabe. Die Subtangente und Subnormale einer gegebenen Curve für einen gegebenen Punkt derselben, letztere unter Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten, zu finden.

Auflösung. I. Der gegebene Punkt der gegebenen Curve sey xy ; die gesuchte Subtangente sey s . Die Gleichung der Tangente für den Punkt xy ist nach §. 181.

$$u - y = \frac{\partial y}{\partial x} (z - x).$$

Ist also x' die Abscisse des Durchschnittspunktes der Tangente mit der Abscissenaxe; so ist

$$-y = \frac{\partial y}{\partial x} (x' - x),$$

und folglich

$$x' = x - y \frac{\partial x}{\partial y},$$

oder

$$x - x' = \frac{y \partial x}{\partial y}.$$

Nach den einfachsten Grundformeln der Coordinatenverwandlung und nach der allgemeinen Definition der Subtangente in §. 185. ist aber

$$x - x' = s.$$

Also ist

$$s = \frac{y \partial x}{\partial y},$$

wodurch die Subtangente im Allgemeinen bestimmt ist.

II. Der gegebene Punkt der gegebenen Curve sey wieder xy ; die gesuchte Subnormale sey s' . Die Gleichung der Normale der gegebenen Curve für den gegebenen Punkt ist nach §. 183. unter Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten

$$u - y = - \frac{\partial x}{\partial y} (z - x).$$

Ist also x' die Abscisse des Durchschnittspunktes der Normale mit der Abscissenaxe; so ist

$$-y = - \frac{\partial x}{\partial y} (x' - x),$$

und folglich

$$x' = x + y \frac{\partial y}{\partial x}$$

oder

$$x' - x = \frac{y \partial y}{\partial x}.$$

Nach den einfachsten Grundformeln der Coordinatenverwandlung und nach der allgemeinen Definition der Subnormale in §. 185. ist aber

$$x' - x = s',$$

Also ist

$$s' = \frac{y \partial y}{\partial x},$$

wodurch die Subnormale im Allgemeinen bestimmt ist.

§. 187.

Aufgabe. Unter Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten die zwischen dem Punkte xy und der Abscissenaxe liegenden Stücke T und N der durch den Punkt xy gezogenen Tangente und Normale einer gegebenen Curve zu bestimmen.

Auflösung. Bezeichnen wir die Subtangente und Subnormale für den Punkt xy wieder durch s und s' ; so ist, weil wir die Coordinaten rechtwinklig annehmen, offenbar

$$T^2 = y^2 + s^2, \quad N^2 = y^2 + s'^2.$$

Nach §. 186. ist aber

$$s = \frac{y \partial x}{\partial y}, \quad s' = \frac{y \partial y}{\partial x}.$$

Also ist

$$T^2 = y^2 \left\{ 1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)^2 \right\}, \quad N^2 = y^2 \left\{ 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right\};$$

folglich

$$T = \pm y \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)^2}, \quad N = \pm y \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2},$$

wo unter der Voraussetzung, dass man die Quadratwurzeln immer positiv nimmt, die obern oder untern Zeichen zu nehmen sind, jenachdem die Ordinate y positiv oder negativ ist, weil T und N natürlich immer als positiv zu betrachten sind.

§. 188.

Die Gleichung der Parabel ist bekanntlich, wenn p den Parameter bezeichnet und der Scheitel als Anfang der Coordinaten angenommen wird, $y^2 = px$. Also ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{p}{2y}, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{2y}{p},$$

und folglich nach §. 181. und §. 183.

$$u - y = \frac{p}{2y} (z - x)$$

und

$$u - y = -\frac{2y}{p} (z - x)$$

respective die Gleichung der durch den Punkt xy gezogenen Tangente und Normale der Parabel.

Für die dem Punkte xy entsprechende Subtangente erhält man ferner nach §. 186. I.

$$s = \frac{2y^2}{p} = \frac{2px}{p} = 2x,$$

und eben so nach §. 186. II. für die dem Punkte xy entsprechende Subnormale

$$s' = \frac{py}{2y} = \frac{1}{2}p,$$

so dass also die Subnormale der Parabel eine constante Grösse, nämlich für jeden Punkt dem halben Parameter gleich ist.

§. 189.

Bekanntlich ist die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

wenn man das obere Zeichen nimmt, die Gleichung der Ellipse; wenn man das untere Zeichen nimmt, die Gleichung der Hyperbel. Durch Differentiation dieser Gleichung ergibt sich

$$\frac{x}{a^2} \pm \frac{y}{b^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

und folglich

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \mp \frac{b^2 x}{a^2 y}, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = \mp \frac{a^2 y}{b^2 x}.$$

Also ist nach §. 181.

$$u - y = \mp \frac{b^2 x}{a^2 y} (z - x)$$

die Gleichung der durch den Punkt xy gezogenen Tangente, und nach §. 183. ist

$$u - y = \pm \frac{a^2 y}{b^2 x} (z - x)$$

die Gleichung der durch denselben Punkt gezogenen Normale.

Die Gleichung der Tangente bringt man auch leicht auf die Form

$$a^2 y u \pm b^2 x z = a^2 y^2 \pm b^2 x^2;$$

oder, weil

$$a^2 y^2 \pm b^2 x^2 = \pm a^2 b^2$$

ist, auf die Form

$$a^2 y u \pm b^2 x z = \pm a^2 b^2.$$

Für die Subtangente erhält man nach §. 186. I.

$$s = \mp \frac{a^2 y^2}{b^2 x}.$$

Aber

$$a^2 y^2 = \pm a^2 b^2 \mp b^2 x^2 = \pm b^2 (a^2 - x^2),$$

und folglich

$$s = - \frac{a^2 - x^2}{x}.$$

Für die Subnormale erhält man nach §. 186. II.

$$s' = \mp \frac{b^2 x}{a^2}.$$

§. 190.

Erklärung. Die gerade Linie AK in *Fig. 3.* werde in dem Punkte A von einem mit dem Halbmesser r beschriebenen Kreise berührt. Lässt man nun diesen Kreis sich auf der Linie AK in der Richtung von A nach K fortwälzen; so wird der Punkt A desselben bei dieser Bewegung eine krumme Linie beschreiben, welche man eine Cycloide nennt.

Der in Rede stehende Kreis heisst der erzeugende Kreis; der Punkt A in demselben, welcher die Cycloide beschreibt, der beschreibende Punkt. Ist B der Punkt, in welchem der erzeugende Kreis, nachdem er eine ganze Umdrehung gemacht, die Linie AK berührt; so heisst die Linie AB die Basis, und ihr Mittelpunkt C der Mittelpunkt oder das Centrum der Cycloide. Das durch den Mittelpunkt C auf die Basis errichtete Perpendikel CS heisst die Axe und deren Endpunkt S der Scheitel der Cycloide. Der Punkt A der Basis heisst auch der Anfang der Cycloide.

Die Cycloide ist eine transcendente Curve, weil, wie wir sogleich in §. 192. sehen werden, ihre Gleichung eine transcendente Grösse enthält, und daher eine transcendente Gleichung ist.

§. 191.

Zusatz. Aus der Entstehung der Cycloide ergibt sich unmittelbar, dass die Basis AB gleich der Peripherie des erzeugenden Kreises, d. i. $= 2r\pi$; folglich $AC = BC = r\pi$ ist. Eben so leicht erhellet, dass die Axe CS jederzeit gleich dem Durchmesser des erzeugenden Kreises, d. i. $= 2r$ ist.

§. 192.

Aufgabe. Die Gleichung der Cycloide zu finden.

Auflösung. Der Halbmesser des erzeugenden Kreises sey $= r$. Als Anfang und Axe der Abscissen wollen wir den Anfang A (Fig. 4.) der Cycloide und die Basis AB derselben annehmen. Die Coordinaten sollen rechtwinklige seyn, und die positiven Abscissen wollen wir in der Richtung von A nach B nehmen.

In unserer Figur ist der erzeugende Kreis in zwei verschiedenen, jedoch mit denselben Buchstaben bezeichneten Lagen dargestellt. Der Durchmesser MN des erzeugenden Kreises ist auf der Basis AB der Cycloide senkrecht; Q ist der beschreibende Punkt, und also zugleich der Punkt der Cycloide, welcher jeder der beiden in der Figur dargestellten Lagen des erzeugenden Kreises entspricht.

Wir wollen uns nun von Q auf AB und MN die Perpendikel PQ und QR gefällt denken, und setzen, dem angenommenen Coordinatensysteme gemäss, $AP = x$, $PQ = y$. Den Winkel MOQ am Mittelpunkte O des erzeugenden Kreises nennt man den Wälzungswinkel, wobei aber zu bemerken ist, dass dieser Winkel bei jeder Lage des erzeugenden Kreises vom Punkte M an im Sinne der Bewegung des erzeugenden Kreises von 0 bis 360° gezählt wird, so dass derselbe im Punkte $A = 0$, im Punkte $C = 180^\circ$, im Punkte $B = 360^\circ$ ist. Der den Wälzungswinkel messende Kreisbogen in einem mit der Einheit als Radius beschriebenen Kreise soll im Allgemeinen durch φ bezeichnet werden.

Aus der Entstehung der Cycloide folgt unmittelbar, dass die Linie AM jederzeit dem, dem Wälzungswinkel entsprechenden Kreisbogen MQ gleich ist, so dass also, weil dieser Kreisbogen offenbar $= r\varphi$ ist, auch jederzeit $AM = r\varphi$ ist.

Dies vorausgesetzt, ergeben sich nun aus der Figur mittelst einer einfachen trigonometrischen Betrachtung auf der Stelle die beiden Gleichungen

$$x = r\varphi - r \sin \varphi, \quad y = r - r \cos \varphi;$$

oder

$$1. \quad x = r(\varphi - \sin \varphi), \quad y = r(1 - \cos \varphi).$$

Aus diesen beiden Gleichungen muss man, um eine Gleichung zwischen x und y zu erhalten, den Bogen φ eliminiren. Dazu gelangt man auf folgende Art.

Weil

$$\frac{y}{r} = 1 - \cos \varphi = \sin v \varphi$$

ist; so ist

$$\varphi = \text{Arc sin } v \frac{y}{r},$$

wobei man aber zu bemerken hat, dass dieser Arcus zwischen den Gränzen $0, \pi$ oder $\pi, 2\pi$ genommen werden muss, je nachdem der Punkt der Cycloide, dessen Ordinate y ist, in der Hälfte AS oder in der Hälfte BS der Cycloide liegt.

Ferner ist $\cos \varphi = \frac{r-y}{r}$, und folglich

$$\sin^2 \varphi = 1 - \left(\frac{r-y}{r} \right)^2 = \frac{2ry - y^2}{r^2};$$

also

$$\sin \varphi = \pm \frac{1}{r} \sqrt{(2r-y)y},$$

wo man das obere oder untere Zeichen zu nehmen hat, je nachdem der Punkt xy der Cycloide in der Hälfte AS oder BS dieser Curve liegt.

Nach 1. ergibt sich also die folgende Gleichung der Cycloide:

$$2. \quad x = r \operatorname{Arc} \sin v \frac{y}{r} \mp \sqrt{(2r-y)y},$$

bei der man aber zu bemerken hat, dass der Arcus zwischen den Gränzen $0, \pi$ und das obere Zeichen, oder der Arcus zwischen den Gränzen $\pi, 2\pi$ und das untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem der Punkt xy der Cycloide in der Hälfte AS oder BS derselben liegt.

Die Gleichungen 1. werden in der Theorie der Cycloide am meisten gebraucht, und führen in der That auch meistens zu den einfachsten Rechnungen.

§. 193.

Aufgabe. Die Subtangente und Subnormale bei der Cycloide zu bestimmen.

Auflösung. Ist xy der Punkt der Cycloide, für welchen die Subtangente und Subnormale bestimmt werden soll, und φ der Bogen eines mit der Einheit als Radius beschriebenen Kreises, welcher den diesem Punkte der Cycloide entsprechenden Wälzungswinkel misst; so ist nach §. 192. I.

$$x = r(\varphi - \sin \varphi), \quad y = r(1 - \cos \varphi).$$

Differentiirt man nun diese Gleichungen in Bezug auf φ als unabhängige veränderliche Grösse; so erhält man

$$\partial x = r(1 - \cos \varphi) \partial \varphi, \quad \partial y = r \sin \varphi \partial \varphi.$$

Also ist, wie man mittelst einiger bekannten trigonometrischen Formeln leicht findet,

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \cot \frac{1}{2} \varphi.$$

Bezeichnen wir nun die Subtangente und Subnormale durch s und s' ; so ist nach §. 186.

$$s = r(1 - \cos \varphi) \tan \frac{1}{2} \varphi = 2r \sin \frac{1}{2} \varphi^2 \tan \frac{1}{2} \varphi$$

und

$$s' = r(1 - \cos \varphi) \cot \frac{1}{2} \varphi = r \sin \varphi.$$

Hieraus erhellet sehr leicht, dass der Punkt M in allen Fällen der Endpunkt der von P an gerechneten Subnormale ist, und dass man also jederzeit die Normale für den Punkt Q erhält, wenn man die Linie QM zieht. Da ferner die Tangente in dem Punkte Q auf der Normale QM senkrecht, und der Winkel MQN als Winkel im Halbkreise ein rechter Winkel ist; so braucht man, um die Tangente in dem Punkte Q zu erhalten, bloss die Linie NQ zu ziehen, und dieselbe, bis sie die Abscissenaxe in T schneidet, zu verlängern, wodurch sich dann auch zugleich die Subtangente ergibt.

§. 194.

Erklärung. Eine Curve, deren Gleichung $y = \log x$, oder, wenn b wie gewöhnlich die Basis der durch $\log$ bezeichneten Logarithmen bezeichnet, $x = b^y$ ist, heisst eine logarithmische Linie.

Für $x = 1$ ist $y = 0$, so dass also die Abscissenaxe in dem Endpunkte der, der Einheit gleichen Abscisse von der logarithmischen Linie geschnitten wird. Die den Abscissen, welche grösser als die Einheit sind, entsprechenden Ordinaten sind sämmtlich positiv und wachsen in's Unendliche, wenn die Abscissen in's Unendliche wachsen. Die den positiven Abscissen, welche kleiner als die Einheit sind, entsprechenden Ordinaten sind sämmtlich negativ, und nehmen in's Unendliche ab, wenn die Abscissen sich immer mehr und mehr der Null nähern. Negativen Abscissen entsprechen keine Punkte der logarithmischen Linie, weil, wie wir aus §. 127. wissen, die Logarithmen negativer Grössen imaginär sind.

Die logarithmische Linie hat also, wenn in *Fig. 5* AB der positive Theil der Abscissenaxe, AC der positive Theil der Ordinatenaxe, AE die Einheit ist, die in der genannten Figur gezeichnete Gestalt. Der Ordinatenaxe nähert sich die logarithmische Linie offenbar immer mehr und mehr, ohne dieselbe jemals wirklich zu erreichen, so dass also die Ordinatenaxe offenbar eine Asymptote der logarithmischen Linie ist.

Die logarithmische Linie ist, weil ihre Gleichung eine transcendente Gleichung ist, so wie die Cycloide, eine transcendente Curve.

§. 195.

Aufgabe. Die Subtangente und Subnormale der logarithmischen Linie zu finden.

Auflösung. Ist $y = \log x$ die Gleichung der logarithmischen Linie und M der Modulus der durch $\log$ bezeichneten Logarithmen; so ist nach §. 58. und §. 59.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{M}{x}.$$

Also ist, wenn wieder s und s' die Subtangente und Subnormale bezeichnen, nach §. 186.

$$s = \frac{xy}{M}, \quad s' = \frac{My}{x}.$$

Die Gleichung der logarithmischen Linie ist aber bekanntlich auch $x = b^y$. Hieraus ergibt sich nach §. 57. und §. 58.

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{b^y}{M} = \frac{x}{M}.$$

Bezeichnen wir nun die Subtangente und Subnormale durch σ und σ' ; so ist nach §. 186.

$$\sigma = M, \quad \sigma' = \frac{x^2}{M}.$$

Jetzt ist also die Subtangente, d. i. die Linie Rt in *Fig. 5.*, eine constante Grösse, nämlich dem Modulus der durch $\log$ bezeichneten Logarithmen gleich, welches eine sehr merkwürdige Eigenschaft der logarithmischen Linie ist.

B. Allgemeine Theorie der Berührungen.

Krümmungskreis.

§. 196.

Die Gleichungen zweier Curven seien

$$1. \quad y = f(x), \quad 2. \quad y = \varphi(x).$$

Diese beiden Curven sollen den Punkt x_1, y_1 mit einander gemein haben, so dass also

$$f(x_1) = \varphi(x_1)$$

ist. Ausserdem soll aber auch

$$f'(x_1) = \varphi'(x_1), \quad f''(x_1) = \varphi''(x_1), \quad \dots \quad f^{(n-1)}(x_1) = \varphi^{(n-1)}(x_1)$$

seyn.

Bezeichnen wir die der Abscisse $x_1 + \Delta$ entsprechenden Ordinaten der beiden Curven durch y' und y'' ; so ist nach §. 110. II., wenn ϱ und θ positive echte Brüche bezeichnen,

$$y' = f(x_1) + f'(x_1) \cdot \frac{\Delta}{1} + f''(x_1) \cdot \frac{\Delta^2}{1 \cdot 2} + \dots + f^{(n-1)}(x_1) \cdot \frac{\Delta^{n-1}}{1 \cdot \dots (n-1)} \\ + f^{(n)}(x_1 + \varrho \Delta) \cdot \frac{\Delta^n}{1 \cdot \dots n},$$

$$y'' = \varphi(x_1) + \varphi'(x_1) \cdot \frac{\Delta}{1} + \varphi''(x_1) \cdot \frac{\Delta^2}{1 \cdot 2} + \dots + \varphi^{(n-1)}(x_1) \cdot \frac{\Delta^{n-1}}{1 \cdot \dots (n-1)} \\ + \varphi^{(n)}(x_1 + \theta \Delta) \cdot \frac{\Delta^n}{1 \cdot \dots n},$$

und folglich nach der Voraussetzung

$$y' - y'' = \{f^{(n)}(x_1 + \varrho \Delta) - \varphi^{(n)}(x_1 + \theta \Delta)\} \frac{\Delta}{1 \cdot \dots n}.$$

Ferner sey

$$3. \quad y = \psi(x)$$

die Gleichung einer dritten Curve und y''' die der Abscisse $x_1 + \Delta$ entsprechende Ordinate derselben; so ist nach §. 110. II.

$$y' - y''' = f(x_1) - \psi(x_1) \\ + \{f'(x_1) - \psi'(x_1)\} \frac{\Delta}{1} \\ + \{f''(x_1) - \psi''(x_1)\} \frac{\Delta^2}{1 \cdot 2} \\ \dots \dots \dots \\ + \{f^{(n-1)}(x_1) - \psi^{(n-1)}(x_1)\} \frac{\Delta^{n-1}}{1 \cdot \dots (n-1)} \\ + \{f^{(n)}(x_1 + \varrho \Delta) - \psi^{(n)}(x_1 + \theta' \Delta)\} \frac{\Delta^n}{1 \cdot \dots n},$$

wo auch θ' einen positiven echten Bruch bezeichnet.

Wir wollen nun annehmen dass diese dritte Curve den Punkt x_1, y_1 mit der Curve 1. gemein habe, und dass also

$$f(x_1) - \psi(x_1) = 0$$

sey. Zugleich aber wollen wir annehmen, dass die Grössen

$$f'(x_1) - \psi'(x_1), \quad f''(x_1) - \psi''(x_1), \quad \dots \quad f^{(n-1)}(x_1) - \psi^{(n-1)}(x_1)$$

nicht sämmtlich verschwinden, sondern dass diese Reihe immer einige nicht verschwindende Glieder enthalte, so dass also, wenn wir diese nicht verschwindenden Glieder, wie sie in ihrer natürlichen Ordnung auf einander folgen, im Allgemeinen durch

$$f^{(\kappa)}(x_1) - \psi^{(\kappa)}(x_1), \quad f^{(\lambda)}(x_1) - \psi^{(\lambda)}(x_1), \dots \quad f^{(\mu)}(x_1) - \psi^{(\mu)}(x_1)$$

bezeichnen,

$$\begin{aligned}
 y' - y'' = & \dots + \{f^{(z)}(x_1) - \psi^{(z)}(x_1)\} \frac{\Delta^z}{1 \dots z} \\
 & + \{f^{(\lambda)}(x_1) - \psi^{(\lambda)}(x_1)\} \frac{\Delta^\lambda}{1 \dots \lambda} \\
 & \dots \dots \dots \\
 & + \{f^{(\mu)}(x_1) - \psi^{(\mu)}(x_1)\} \frac{\Delta^\mu}{1 \dots \mu} \\
 & + \{f^{(n)}(x_1 + \varrho \Delta) - \psi^{(n)}(x_1 + \theta' \Delta)\} \frac{\Delta^n}{1 \dots n}
 \end{aligned}$$

ist.

Setzen wir aber der Kürze wegen

$$P = \{f^{(n)}(x_1 + \varrho \Delta) - \psi^{(n)}(x_1 + \theta' \Delta)\} \frac{\Delta^{n-z}}{1 \dots n}$$

und

$$\begin{aligned}
 Q = & \{f^{(z)}(x_1) - \psi^{(z)}(x_1)\} \frac{1}{1 \dots z} \\
 & + \{f^{(\lambda)}(x_1) - \psi^{(\lambda)}(x_1)\} \frac{\Delta^{\lambda-z}}{1 \dots \lambda} \\
 & \dots \dots \dots \\
 & + \{f^{(\mu)}(x_1) - \psi^{(\mu)}(x_1)\} \frac{\Delta^{\mu-z}}{1 \dots \mu} \\
 & + \{f^{(n)}(x_1 + \varrho \Delta) - \psi^{(n)}(x_1 + \theta' \Delta)\} \frac{\Delta^{n-z}}{1 \dots n};
 \end{aligned}$$

so ist

$$y' - y'' = P \Delta^z, \quad y' - y''' = Q \Delta^z.$$

Nähert nun Δ sich der Null; so nähern, weil ϱ, θ, θ' positive echte Brüche sind, die Grössen

$$f^{(n)}(x_1 + \varrho \Delta) - \psi^{(n)}(x_1 + \theta \Delta)$$

und

$$f^{(n)}(x_1 + \varrho \Delta) - \psi^{(n)}(x_1 + \theta' \Delta)$$

sich respective immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade den Grössen

$$f^{(z)}(x_1) - \psi^{(z)}(x_1) \text{ und } f^{(n)}(x_1) - \psi^{(n)}(x_1),$$

und die Grössen P und Q nähern sich offenbar immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade respective der Null und der Grösse

$$\frac{f^{(z)}(x_1) - \psi^{(z)}(x_1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots z},$$

welche nach der Voraussetzung nicht $= 0$ ist. Hieraus ist ersichtlich, dass man die Grösse Δ immer wird so nahe bei Null annehmen können, dass für alle der Null noch näher kommende Δ der absolute Werth der Grösse Q grösser als der absolute

Werth der Grösse P , also auch der absolute Werth von $Q\Delta^2$ grösser als der absolute Werth von $P\Delta^2$, d. i. der absolute Werth von $y' - y''$ grösser als der absolute Werth von $y' - y''$ ist, und dass folglich in der Nähe des Punktes x_1, y_1 die Curve 3. nie zwischen den Curven 1. und 2. liegen kann. Stetigkeit der Functionen und ihrer Differentialquotienten bis zu dem n ten in der Nähe des Punktes x_1, y_1 wird hierbei aber immer vorausgesetzt.

§. 197.

Wir wollen nun annehmen, dass die Gleichungen

$$1. \quad y = f(x), \quad 2. \quad y = \varphi(x)$$

wieder die Gleichungen zweier Curven seyen, und dass die zweite Gleichung n willkürliche Constanten $a, b, c, d, \dots$ enthalte, so wie z. B. die allgemeine Gleichung der geraden Linie bekanntlich zwei, die allgemeinste Gleichung des Kreises drei willkürliche Constanten enthält. Bestimmt man nun, wenn x_1, y_1 ein beliebiger Punkt der Curve 1. ist, die in der Gleichung 2. enthaltenen n willkürlichen Constanten aus den n Gleichungen:

$$3. \quad \begin{cases} f(x_1) - \varphi(x_1) = 0, \\ f'(x_1) - \varphi'(x_1) = 0, \\ f''(x_1) - \varphi''(x_1) = 0, \\ \dots \dots \dots \\ f^{(n-1)}(x_1) - \varphi^{(n-1)}(x_1) = 0, \end{cases}$$

und setzt die gefundenen Werthe für die in Rede stehenden Constanten in die Gleichung 2.; so wird die, durch die auf diese Weise erhaltene Gleichung characterisirte Curve den Punkt x_1, y_1 mit der Curve 1. gemein haben, und sich in der Nähe dieses Punktes enger an die Curve 1. anschliessen als irgend eine andere der durch die allgemeine Gleichung 2. characterisirten Curven. Da nämlich die in Rede stehenden willkürlichen Constanten durch die Gleichungen 3. vollständig bestimmt sind, und also diese Gleichungen sämmtlich durch andere Werthe der willkürlichen Constanten nicht erfüllt werden können; so kann nach §. 196. keine andere der durch die allgemeine Gleichung 2. characterisirten Curven, welche durch den Punkt x_1, y_1 geht, in der Nähe dieses Punktes zwischen der Curve 1. und der durch die Gleichung 2., wenn man in dieselbe für die in ihr enthaltenen n willkürlichen Constanten die nach der obigen Anweisung bestimmten Werthe dieser Constanten setzt, characterisirten Curve liegen, so dass sich also die letztere Curve unter allen durch die allgemeine Gleichung 2. characterisirten, durch den Punkt x_1, y_1 gehenden Curven, in der Nähe dieses Punktes offenbar am innigsten an die Curve 1. anschliesst, wie oben behauptet wurde.

§. 198.

Die im vorigen Paragraphen angestellten Betrachtungen haben auf den folgenden wichtigen Begriff geführt.

Wenn

$$1. y = f(x), \quad 2. y = \varphi(x)$$

die Gleichungen zweier Curven sind, und für den Punkt x_1, y_1

$$f(x_1) = \varphi(x_1), f'(x_1) = \varphi'(x_1), \dots f^{(n-1)}(x_1) = \varphi^{(n-1)}(x_1)$$

ist; so sagt man, dass die beiden Curven in dem Punkte x_1, y_1 , welchen sie offenbar mit einander gemein haben werden, eine Berührung oder einen Contact der $(n-1)$ sten Ordnung haben.

Zugleich geht aus dem vorigen Paragraphen unmittelbar hervor, dass mit einer beliebigen durch die Gleichung $y = f(x)$ characterisirten Curve eine andere durch die allgemeine, n willkürliche Constanten enthaltende Gleichung $y = \varphi(x)$ characterisirte Curve jederzeit höchstens nur einen Contact der $(n-1)$ sten Ordnung haben kann.

Weil also z. B. die allgemeine Gleichung der geraden Linie nur zwei willkürliche Constanten enthält; so kann die gerade Linie mit jeder beliebigen Curve nur einen Contact der ersten Ordnung haben. Die allgemeinste Gleichung des Kreises enthält drei willkürliche Constanten, und der Kreis kann also mit jeder beliebigen Curve höchstens einen Contact der zweiten Ordnung haben.

§. 199.

Der Kreis, welcher mit einer gegebenen Curve in einem gewissen Punkte derselben einen Contact der zweiten Ordnung hat, schliesst sich nach §. 197. unter allen Kreisen, welche sich durch den in Rede stehenden Punkt beschreiben lassen, in der Nähe dieses Punktes am innigsten an die gegebene Curve an, und mittelst dieses Kreises wird sich also die Krümmung der gegebenen Curve in der Nähe des in Rede stehenden Punktes mit der höchsten überhaupt erreichbaren Genauigkeit durch einen Kreisbogen darstellen lassen, welches auf den folgenden in jeder Beziehung höchst wichtigen Begriff geführt hat.

Der Kreis, welcher mit einer Curve in einem gegebenen Punkte derselben einen Contact der zweiten Ordnung hat, heisst der Krümmungskreis, und sein Halbmesser der Krümmungshalbmesser der Curve in dem gegebenen Punkte derselben. Der Mittelpunkt des Krümmungskreises wird auch wohl zuweilen in der Kürze der Krümmungsmittelpunkt genannt.

§. 200.

Aufgabe. Die Gleichung der geraden Linie zu finden, welche mit einer Curve, deren Gleichung

$y=f(x)$ ist, in dem Punkte x_1, y_1 dieser Curve einen Contact der ersten Ordnung hat.

Auflösung. Die Gleichung der gesuchten geraden Linie sey

$$y = q(x) = Ax + B.$$

Nach §. 197. hat man zur Bestimmung der willkürlichen Constanten A, B die beiden Gleichungen

$$f(x_1) = q(x_1), \quad f'(x_1) = q'(x_1).$$

Weil nach der Annahme der Punkt x_1, y_1 in der gegebenen Curve liegt, so ist $f(x_1) = y_1$. Ferner ist $q(x_1) = Ax_1 + B$, und, weil $q'(x) = A$ ist, auch $q'(x_1) = A$. Also sind

$$y_1 = Ax_1 + B, \quad f'(x_1) = A$$

die beiden Gleichungen, aus denen die willkürlichen Constanten A, B bestimmt werden müssen. Zieht man die erste dieser beiden Gleichungen von der Gleichung

$$y = Ax + B$$

ab; so erhält man die Gleichung

$$y - y_1 = A(x - x_1),$$

in welche man nun unmittelbar für A seinen oben gefundenen Werth setzen kann, wodurch man die Gleichung

$$y - y_1 = f'(x_1) \cdot (x - x_1)$$

der gesuchten geraden Linie erhält, welche man übrigens, wenn man sich nur erinnert, dass der Differentialquotient $\frac{\partial y_1}{\partial x_1}$ immer aus der Gleichung der gegebenen Curve entwickelt werden muss, auch unter der Form

$$y - y_1 = \frac{\partial y_1}{\partial x_1} (x - x_1)$$

schreiben kann.

Vergleicht man dies mit §. 181.; so ergibt sich, dass die gerade Linie, welche mit der gegebenen Curve in dem Punkte x_1, y_1 derselben einen Contact der ersten Ordnung hat, keine andere als die Tangente der gegebenen Curve in dem Punkte x_1, y_1 ist, wie sich auch im Voraus erwarten liess.

§. 201.

Aufgabe. Die Gleichung des Krümmungskreises einer gegebenen Curve, deren Gleichung $y = f(x)$ ist, für einen gegebenen Punkt x_1, y_1 dieser Curve zu finden.

Auflösung. Die gesuchte Gleichung des Krümmungskreises sey im Allgemeinen

$$1. \quad y = q(x);$$

so haben wir zur Bestimmung der drei in derselben enthaltenen willkürlichen Constanten nach §. 197. die drei Gleichungen

$$2. \quad f(x_1) = \varphi(x_1), \quad f'(x_1) = \varphi'(x_1), \quad f''(x_1) = \varphi''(x_1).$$

Nehmen wir aber die Coordinaten rechtwinklig an, und bezeichnen die Coordinaten des Mittelpunkts des Krümmungskreises durch α, β , seinen Halbmesser durch ϱ ; so ist die allgemeine Gleichung des Krümmungskreises bekanntlich

$$3. \quad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \varrho^2$$

oder

$$4. \quad (x - \alpha)^2 + \{\varphi(x) - \beta\}^2 = \varrho^2.$$

Durch zweimalige Differentiation dieser Gleichung erhält man

$$5. \quad x - \alpha + \{\varphi(x) - \beta\} \varphi'(x) = 0,$$

$$6. \quad 1 + \{\varphi(x) - \beta\} \varphi''(x) + \{\varphi'(x)\}^2 = 0,$$

und hat also nun nach 2. zur Bestimmung der Constanten α, β, ϱ die drei folgenden Gleichungen:

$$7. \quad \begin{cases} (x_1 - \alpha)^2 + \{f(x_1) - \beta\}^2 = \varrho^2, \\ x_1 - \alpha + \{f(x_1) - \beta\} f'(x_1) = 0, \\ 1 + \{f(x_1) - \beta\} f''(x_1) + \{f'(x_1)\}^2 = 0; \end{cases}$$

oder, weil nach der Annahme der Punkt x_1, y_1 in der gegebenen Curve liegt, und daher $y_1 = f(x_1)$ ist, die drei folgenden Gleichungen:

$$8. \quad \begin{cases} (x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2 = \varrho^2, \\ x_1 - \alpha + (y_1 - \beta) f'(x_1) = 0, \\ 1 + (y_1 - \beta) f''(x_1) + \{f'(x_1)\}^2 = 0. \end{cases}$$

Bestimmt man aus den beiden letzten Gleichungen dieses Systems α und β ; so erhält man

$$9. \quad \alpha = x_1 - \frac{1 + \{f'(x_1)\}^2}{f''(x_1)} f'(x_1), \quad \beta = y_1 + \frac{1 + \{f'(x_1)\}^2}{f''(x_1)},$$

und hieraus ferner mittelst der ersten der Gleichungen 8.

$$10. \quad \varrho = \pm \frac{\left\{1 + \{f'(x_1)\}^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{f''(x_1)},$$

wò, weil ϱ seiner Natur nach eine positive Grösse ist, das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, jenachdem $f''(x_1)$ eine positive oder eine negative Grösse ist.

Erinnert man sich nur immer, dass alle Differentialquotienten aus der Gleichung $y = f(x)$ der gegebenen Curve zu entwickeln sind; so kann man die obigen Formeln, durch welche

der Krümmungskreis seiner Lage und Grösse nach vollkommen bestimmt ist, auch auf folgende Art ausdrücken:

$$11. \quad \alpha = x_1 - \frac{\left\{ 1 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1} \right)^2 \right\} \frac{\partial y_1}{\partial x_1}}{\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2}}, \quad \beta = y_1 + \frac{1 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1} \right)^2}{\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2}};$$

$$12. \quad \varrho = \pm \frac{\left\{ 1 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2}};$$

wobei aber wieder nicht unbemerkt bleiben darf, dass in der letzten Gleichung das obere oder das untere Zeichen genommen werden muss, jenachdem $\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2}$ positiv oder negativ ist.

Endlich kann man die obigen Formeln auch noch unter der Form

$$13. \quad \alpha = x_1 - \frac{(\partial x_1^2 + \partial y_1^2) \partial y_1}{\partial x_1 \partial^2 y_1}, \quad \beta = y_1 + \frac{\partial x_1^2 + \partial y_1^2}{\partial^2 y_1},$$

$$\varrho = \pm \frac{(\partial x_1^2 + \partial y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial x_1 \partial^2 y_1}$$

schreiben, wenn man nur beachtet, dass in der letzten Formel das Zeichen immer so zu nehmen ist, dass ϱ positiv wird.

§. 202.

Zusatz. Der Mittelpunkt des Krümmungskreises einer Curve in dem Punkte x_1, y_1 derselben liegt jederzeit auf der durch diesen Punkt gehenden Normale der Curve.

Nach der zweiten der Gleichungen 8. in §. 201. ist

$$x_1 - \alpha + (y_1 - \beta) f'(x_1) = 0,$$

oder

$$\beta - y_1 = - \frac{1}{f'(x_1)} (\alpha - x_1),$$

oder

$$\beta - y_1 = - \frac{\partial x_1}{\partial y_1} (\alpha - x_1).$$

Weil nun nach §. 183. die Gleichung der durch den Punkt x_1, y_1 der gegebenen Curve gehenden Normale derselben

$$y - y_1 = - \frac{\partial x_1}{\partial y_1} (x - x_1)$$

ist; so erhellet die Richtigkeit des zu beweisenden Satzes.

§. 203.

Aufgabe. Den Krümmungskreis für jeden der drei Kegelschnitte zu bestimmen.

Auflösung. I. Die Gleichung der Parabel ist

$$y^2 = px.$$

Also ist

$$2y \frac{\partial y}{\partial x} = p, \quad y \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 = 0;$$

folglich

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{p}{2y}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{p^2}{4y^3};$$

$$1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 = 1 + \frac{p^2}{4y^2} = \frac{4y^2 + p^2}{4y^2} = \frac{4x + p}{4x};$$

$$\left\{ 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right\} \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{4x + p}{4x} \cdot \frac{p}{2y} = \frac{p(4x + p)}{8xy};$$

$$\frac{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} = -\frac{y(4y^2 + p^2)}{p^2}, \quad \frac{\left\{ 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right\} \frac{\partial y}{\partial x}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} = -2x - \frac{1}{2}p.$$

Bezeichnen wir nun der Kürze wegen die Coordinaten des Punktes der Parabel, für welchen der Krümmungskreis bestimmt werden soll, durch x, y selbst; so ist nach §. 201.

$$\alpha = x + 2x + \frac{1}{2}p = 3x + \frac{1}{2}p,$$

$$\beta = y - \frac{y(4y^2 + p^2)}{p^2} = -\frac{4y^3}{p^2} = -\frac{4x^2}{y}.$$

Weil ferner der absolute Werth der Grösse

$$\frac{\left\{ 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} = -\left(\frac{4y^2 + p^2}{4y^2} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{4y^3}{p^2}$$

offenbar

$$\frac{(4y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{2p^2}$$

ist; so ist

$$\rho = \frac{(4y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{2p^2}.$$

Bezeichnet man das zwischen dem Punkte xy und der Abscissenaxe liegende Stück der durch den Punkt xy gezogenen Normale der Parabel durch N ; so ist nach §. 187.

$$N^2 = y^2 \left(1 + \frac{p^2}{4y^2} \right) = \frac{4y^2 + p^2}{4},$$

und folglich

$$(4y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}} = 8N^3.$$

Also ist

$$\varrho = \frac{N^3}{(\frac{1}{2}p)^2}.$$

Aus der Formel

$$\varrho = \frac{(4y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{2p^2}$$

ergiebt sich, dass im Scheitel der Parabel $\varrho = \frac{1}{2}p$ ist.

II. Die Gleichung

$$b^2x^2 \pm a^2y^2 = a^2b^2$$

ist, jenachdem man das obere oder das untere Zeichen nimmt, die Gleichung der Ellipse oder der Hyperbel. Durch zweimalige Differentiation dieser Gleichung erhält man

$$b^2x \pm a^2y \frac{\partial y}{\partial x} = 0, \quad b^2 \pm a^2 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \pm a^2y \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0;$$

$$\pm b^2x + a^2y \frac{\partial y}{\partial x} = 0, \quad \pm b^2 + a^2 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + a^2y \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0.$$

Aus der ersten dieser beiden Gleichungen folgt

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \mp \frac{b^2x}{a^2y},$$

und, wenn man diesen Werth des ersten Differentialquotienten in die zweite Gleichung einführt,

$$\begin{aligned} a^2y \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \mp b^2 - \frac{b^4x^2}{a^2y^2} = \mp \frac{b^2(a^2y^2 \pm b^2x^2)}{a^2y^2} \\ &= - \frac{b^2(b^2x^2 \pm a^2y^2)}{a^2y^2} = - \frac{b^4}{y^2}; \end{aligned}$$

also

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = - \frac{b^4}{a^2y^3}.$$

Folglich ist

$$1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 = \frac{b^4x^2 + a^4y^2}{a^4y^2}, \quad \left\{ 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right\} \frac{\partial y}{\partial x} = \mp \frac{b^2(b^4x^2 + a^4y^2)x}{a^6y^3};$$

$$\frac{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} = - \frac{(b^4x^2 + a^4y^2)y}{a^2b^4},$$

$$\frac{\left\{ 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right\} \frac{\partial y}{\partial x}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} = \pm \frac{(b^4x^2 + a^4y^2)x}{a^4b^2};$$

also

$$\alpha = x \mp \frac{(b^4 x^2 + a^4 y^2)x}{a^4 b^2} = \frac{(a^4 b^2 \mp b^4 x^2 \mp a^4 y^2)x}{a^4 b^2},$$

$$\beta = y \mp \frac{(b^4 x^2 + a^4 y^2)y}{a^2 b^4} = \frac{(a^2 b^4 \mp b^4 x^2 \mp a^4 y^2)y}{a^2 b^4},$$

wenn wir wieder der Kürze wegen die Coordinaten des Punktes der Ellipse oder Hyperbel, für welchen der Krümmungskreis bestimmt werden soll, durch x, y selbst bezeichnen.

Weil nun aber

$$\pm a^2 y^2 = a^2 b^2 - b^2 x^2, \quad b^2 x^2 = a^2 b^2 \mp a^2 y^2;$$

$$\pm a^4 y^2 = a^4 b^2 - a^2 b^2 x^2, \quad b^4 x^2 = a^2 b^4 \mp a^2 b^2 y^2$$

ist; so erhält man leicht

$$\alpha = \frac{(a^2 \mp b^2)x^3}{a^4}, \quad \beta = -\frac{(a^2 \mp b^2)y^3}{b^4}.$$

Weil ferner der absolute Werth von

$$\frac{\left\{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} = -\left(\frac{b^4 x^2 + a^4 y^2}{a^4 y^2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{a^2 y^3}{b^4}$$

offenbar

$$\frac{(b^4 x^2 + a^4 y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4}$$

ist; so ist

$$\varrho = \frac{(b^4 x^2 + a^4 y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4}.$$

Bezeichnen wir wieder den zwischen dem Punkte xy und der Abscissenaxe liegenden Theil der durch den Punkt xy gezogenen Normale der Ellipse oder Hyperbel durch N ; so ist nach §. 187.

$$N^2 = y^2 \left(1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}\right) = \frac{b^4 x^2 + a^4 y^2}{a^4},$$

und folglich

$$(b^4 x^2 + a^4 y^2)^{\frac{3}{2}} = a^6 N^3;$$

also

$$\varrho = \frac{a^2 N^3}{b^4}.$$

Bezeichnen wir aber wie gewöhnlich den Parameter der Ellipse oder Hyperbel durch p ; so ist nach der Theorie der Kegelschnitte bekanntlich

$$p = \frac{2b^2}{a}, \quad p^2 = \frac{4b^4}{a^2}, \quad \frac{b^4}{a^2} = \left(\frac{1}{2}p\right)^2,$$

und folglich wieder

$$\varrho = \frac{N^3}{\left(\frac{1}{2}p\right)^2}.$$

§. 204.

Zusatz. Der Krümmungshalbmesser eines beliebigen Punktes xy jedes Kegelschnitts wird gefunden, wenn man den Cubus des zwischen dem Punkte xy und der Abscissenaxe liegenden Theils der durch den Punkt xy gezogenen Normale des Kegelschnitts durch das Quadrat des halben Parameters dividirt.

Dies ist also eine allgemeine Eigenschaft aller Kegelschnitte.

§. 205.

Betrachtet man die Erde als ein elliptisches Sphäroid; so versteht man unter der Breite eines beliebigen Punktes auf ihr den spitzigen Winkel, unter welchem die durch diesen Punkt gezogene Normale des durch denselben gelegten Meridians, gegen die grosse Axe dieses Meridians geneigt ist.

Bezeichnen wir nun die grosse und kleine Halbaxe des Erdsphäroids respective durch a und b , die Breite eines beliebigen Punktes auf der Erdoberfläche durch φ , die rechtwinkligen Coordinaten dieses Punktes durch x, y , seinen Krümmungshalbmesser durch ρ ; so ist zunächst, wie aus §. 183. und §. 203. II. sich leicht ergibt,

$$u - y = \frac{a^2 y}{b^2 x} (z - x)$$

die Gleichung der durch den Punkt xy gezogenen Normale des Meridians dieses Punktes, Alles in der Ebene dieses Meridians gedacht. Also ist nach Principien der analytischen Geometrie

$$1. \quad \tan \varphi = \frac{a^2 y}{b^2 x}.$$

Entwickelt man, die Gleichung der Ellipse zu Hülfe nehmend, aus dieser Gleichung umgekehrt x und y ; so erhält man

$$2. \quad \begin{cases} x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \varphi}} = \frac{a^2 \cos \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}, \\ y = \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + a^2 \cot^2 \varphi}} = \frac{b^2 \sin \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}. \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich leicht

$$b^4 x^2 + a^4 y^2 = \frac{a^4 b^4}{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi},$$

und folglich nach §. 203.

$$3. \quad \rho = \frac{a^2 b^2}{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}},$$

oder

$$4. \quad \rho = \frac{a^2 b^2}{\{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \varphi\}^{\frac{3}{2}}},$$

und folglich, wenn man

$$5. \quad \frac{a^2 - b^2}{a^2} = e^2$$

setzt,

$$6. \quad \varrho = a(1 - e^2)(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{3}{2}}.$$

§. 206.

Unter einem Meridiangrad oder einem Grad schlechthin versteht man in der Geographie einen Bogen eines Meridians von solcher Länge, dass die durch seine beiden Endpunkte gezogenen Normalen des Meridians einen Winkel von 1° mit einander einschliessen. Bezeichnen wir die Breiten der beiden Endpunkte eines Meridiangrades durch φ und φ' ; so erhellet leicht, dass immer $\varphi' - \varphi = 1^\circ$ ist, und dass man also einen Grad auch als einen Bogen eines Meridians definiren kann, welcher zwischen zwei Punkten dieses Meridians liegt, deren Breiten um einen Grad von einander verschieden sind.

Aus zwei unter verschiedenen Breiten gemessenen Graden lässt sich das Verhältniss der beiden Axen des Erdsphäroids, oder die sogenannte Abplattung, und auch die beiden Axen selbst bestimmen, woraus sich der Zweck der sogenannten Gradmessungen erklärt, durch welche bekanntlich die Gestalt und Grösse des Erdkörpers zuerst genauer bestimmt worden ist.

Um dies zu zeigen, seyen G und G' zwei unter den Breiten φ und φ' gemessene Grade, und ϱ, ϱ' die denselben Breiten entsprechenden Krümmungshalbmesser; so ist klar, dass man, wenigstens mit jedem hier nöthigen Grade der Genauigkeit,

$$G : G' = \varrho : \varrho'$$

setzen kann. Weil nun aber nach §. 205.

$$\varrho : \varrho' = (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{3}{2}} : (1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{-\frac{3}{2}}$$

ist; so ist auch

$$G : G' = (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{3}{2}} : (1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{-\frac{3}{2}},$$

$$G^{\frac{2}{3}} : G'^{\frac{2}{3}} = 1 - e^2 \sin^2 \varphi' : 1 - e^2 \sin^2 \varphi,$$

und folglich

$$e^2 = \frac{G^{\frac{2}{3}} - G'^{\frac{2}{3}}}{G^{\frac{2}{3}} \sin^2 \varphi - G'^{\frac{2}{3}} \sin^2 \varphi'} = \frac{1 - \left(\frac{G'}{G}\right)^{\frac{2}{3}}}{\left\{1 - \left(\frac{\sin \varphi'}{\sin \varphi}\right)^2 \left(\frac{G'}{G}\right)^{\frac{2}{3}}\right\} \sin^2 \varphi}.$$

Berechnet man die Hülfswinkel θ und θ' aus den Formeln

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^{\frac{1}{3}} = \cos \theta, \quad \left(\frac{G'}{G}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{\sin \varphi'}{\sin \varphi} = \cos \theta';$$

so kann man e mit grosser Leichtigkeit mittelst der Formel

$$e = \frac{\sin \theta}{\sin \theta' \sin \varphi}$$

berechnen.

Hat man e , so findet man, weil

$$\frac{b}{a} = \sqrt{(1-e)(1+e)}$$

ist, auch leicht $\frac{b}{a}$, und hieraus ferner die sogenannte Abplattung $\frac{a-b}{a} = 1 - \frac{b}{a}$.

Uebrigens kann man nun aber auch leicht a und b selbst finden. Es ist nämlich offenbar

$$\frac{\pi}{180} : G = 1 : \varrho, \quad \varrho = \frac{180 G}{\pi}.$$

Folglich ist nach §. 205.

$$\frac{180 G}{\pi} = a(1-e^2)(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{3}{2}},$$

und hieraus

$$a = \frac{180 G (1-e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}{\pi (1-e^2)}.$$

Hat man aber mittelst dieser Formel a gefunden; so kann man auch leicht b finden, da man das Verhältniss $\frac{b}{a}$ kennt.

§. 207.

Aufgabe. Den Krümmungshalbmesser der Cycloide zu finden.

Auflösung. Nach §. 193. ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \cot \frac{1}{2} \varphi,$$

und folglich

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial \cot \frac{1}{2} \varphi}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = - \frac{1}{2 \sin^2 \frac{1}{2} \varphi} \cdot \frac{1}{r(1-\cos \varphi)} (\S. 193.);$$

also

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = - \frac{1}{4r \sin^2 \frac{1}{2} \varphi}.$$

Ohne Schwierigkeit erhält man hieraus

$$\varrho = 4r \sin^2 \frac{1}{2} \varphi.$$

Die Sehne QM (Fig. 4.) des erzeugenden Kreises ist, wie leicht erhellet, $= 2r \sin \frac{1}{2} \varphi$. Also ist der Krümmungshalbmesser doppelt so gross wie diese Sehne.

Bestimmt man noch die Ordinate β des Mittelpunktes des Krümmungskreises; so erhält man

$$\beta = y - 4r \sin \frac{1}{2} \varphi^2,$$

d. i. nach §. 192.

$$\beta = r(1 - \cos \varphi) - 4r \sin \frac{1}{2} \varphi^2 = -2r \sin \frac{1}{2} \varphi^2.$$

Da diese Ordinate stets negativ ist, und nach §. 202. der Mittelpunkt des Krümmungskreises immer auf der Normale des Punktes der Curve, für welchen man den Krümmungskreis bestimmt hat, liegt; so findet man den Mittelpunkt des Krümmungskreises für einen beliebigen Punkt Q (Fig. 4.) der Cycloide leicht, wenn man die Sehne QM des erzeugenden Kreises über den Punkt M hinaus verlängert, und die Verlängerung $= QM$ macht, wo dann der Endpunkt der auf diese Weise erhaltenen Linie jederzeit der gesuchte Mittelpunkt des Krümmungskreises seyn wird, so dass man also auch den Krümmungskreis der Cycloide selbst für jeden ihrer Punkte leicht beschreiben kann.

C. Concavität und Convexität der Curven. Wendungspunkte und Spitzen. Nachtrag zur Lehre vom Krümmungskreise.

§. 208.

Wir denken uns wieder einen gewissen bestimmten Punkt xy einer Curve, deren Gleichung $y = f(x)$ ist, und nehmen im Folgenden, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes bemerkt wird, immer an, dass $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ in der Nähe von x stetig sind, so dass diese Grössen nicht bloss selbst endliche reelle völlig bestimmte Werthe haben, sondern auch endliche reelle völlig bestimmte Werthe behalten, wenn man x um eine unendlich kleine positive Grösse zu- oder abnehmen lässt.

Die Curve liegt, weil $f(x)$ nach der Voraussetzung einen endlichen reellen völlig bestimmten Werth hat, und auch einen endlichen reellen völlig bestimmten Werth behält, wenn man x um eine unendlich kleine positive Grösse zu- oder abnehmen lässt, in der Nähe des Punktes xy auf beiden Seiten dieses Punktes. Denkt man sich nun durch denselben eine Tangente an die Curve gezogen; so können zwei Fälle eintreten, jenachdem die Curve nämlich auf den beiden Seiten des Punktes xy auf einer Seite der durch denselben an sie gezogenen Tangente, oder auf verschiedenen Seiten dieser Tangente liegt, immer nur in der Nähe des Punktes xy .

Im ersten Falle (Fig. 6.) sagt man, dass die Curve in dem Punkte xy , von der Tangente an gerechnet, nach der Seite der Tangente hin, auf welcher sie in der Nähe des Punktes xy liegt, concav, nach der entgegengesetzten Seite hin dagegen convex sey. Im zweiten Falle (Fig. 7.) nennt man den Punkt xy einen Wendungspunkt. Der Punkt xy ist in beiden Figuren durch P bezeichnet worden.

§. 209.

Lehrsatz. Wenn $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ in der Nähe von x stetig sind, so dass diese Grössen nicht bloss selbst endliche reelle völlig bestimmte Werthe haben, sondern auch endliche reelle völlig bestimmte Werthe behalten, wenn man x um eine unendlich kleine positive Grösse zu- oder abnehmen lässt, und $f''(x)$ nicht $= 0$ ist; so liegt die Curve in der Nähe des Punktes xy auf beiden Seiten dieses Punktes auf einer Seite der durch denselben an die Curve gezogenen Tangente, und ist also, von der Tangente an gerechnet, nach der Seite der Tangente hin, auf welcher sie in der Nähe des Punktes xy liegt, concav, nach der andern Seite hin dagegen convex.

Beweis. Die Gleichung der durch den Punkt xy an die Curve gezogenen Tangente ist nach §. 181.

$$1. \quad u - f(x) = f'(x) \cdot (z - x)$$

Man lasse sich nun x um $\pm \Delta x$ verändern, und bezeichne die den Abscissen $x - \Delta x$ und $x + \Delta x$ entsprechenden Ordinaten der Curve durch y' und Y' , die denselben Abscissen entsprechenden Ordinaten der durch den Punkt xy gezogenen Tangente dagegen durch y'' und Y'' ; so ist nach §. 110. II.

$$2. \quad \begin{cases} y' = f(x) - f'(x) \cdot \Delta x + \frac{1}{2} f''(x - \varrho \Delta x) \cdot \Delta x^2, \\ Y' = f(x) + f'(x) \cdot \Delta x + \frac{1}{2} f''(x + \theta \Delta x) \cdot \Delta x^2, \end{cases}$$

wo ϱ und θ positive echte Brüche bezeichnen; und nach 1. ist

$$3. \quad \begin{cases} y'' = f(x) - f'(x) \cdot \Delta x, \\ Y'' = f(x) + f'(x) \cdot \Delta x, \end{cases}$$

also

$$4. \quad \begin{cases} y' = y'' + \frac{1}{2} f''(x - \varrho \Delta x) \cdot \Delta x^2, \\ Y' = Y'' + \frac{1}{2} f''(x + \theta \Delta x) \cdot \Delta x^2. \end{cases}$$

Weil nun nach der Voraussetzung $f''(x)$ nicht $= 0$ und in der Nähe von x stetig ist; so kann man Δx offenbar so nahe bei Null annehmen, dass

$$f''(x - \varrho \Delta x) \text{ und } f''(x + \theta \Delta x)$$

für den in Rede stehenden Werth von Δx und für der Null noch näher kommende Δx beide immer > 0 oder beide immer < 0 sind, jenachdem $f''(x) > 0$ oder < 0 ist; und für die in Rede stehenden Werthe von Δx , d. h. in der Nähe des Punktes xy nach beiden Seiten hin, ist also mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander immer

$$y' > y'', \quad Y' > Y'';$$

d. h. die Curve liegt in der Nähe des Punktes xy auf beiden Seiten desselben auf einer Seite der durch diesen Punkt an die Curve gezogenen Tangente, und ist also immer, von der Tan-

gente an gerechnet, nach der Seite der Tangente hin, auf welcher sie in der Nähe des Punktes xy liegt, concav, nach der andern Seite hin dagegen convex, wie bewiesen werden sollte.

§. 210.

Lehrsatz. Wenn $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ in der Nähe von x stetig sind, so dass diese Grössen nicht bloss selbst endliche reelle völlig bestimmte Werthe haben, sondern auch endliche reelle völlig bestimmte Werthe behalten, wenn man x um eine unendlich kleine positive Grösse zu- oder abnehmen lässt, und $f''(x) = 0$, aber $f'''(x)$ nicht $= 0$ ist; so ist der Punkt xy ein Wendungspunkt.

Beweis. Unter Beibehaltung der in §. 209. gebrauchten Zeichen und der Voraussetzung, dass $f''(x) = 0$ ist, erhält man leicht ganz auf ähnliche Art wie dort

$$y' = y'' - \frac{1}{6}f'''(x - \varrho \Delta x) \cdot \Delta x^3, \quad Y' = Y'' + \frac{1}{6}f'''(x + \theta \Delta x) \cdot \Delta x^3.$$

Weil nun $f'''(x)$ nicht $= 0$ ist; so ist für der Null unendlich nahe kommende Δx mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$f'''(x - \varrho \Delta x) \leq 0, \quad f'''(x + \theta \Delta x) \leq 0,$$

folglich

$$y' \geq y'', \quad Y' \leq Y'',$$

also der Punkt xy offenbar ein Wendungspunkt, wie bewiesen werden sollte.

Anmerkung. Auf ganz ähnliche Art würde man allgemeiner beweisen können, dass, wenn der zweite und eine gerade Anzahl nächstfolgender Differentialquotienten für den Werth x der veränderlichen Grösse verschwinden, der erste nicht verschwindende Differentialquotient aber von ungerader Ordnung ist, der Punkt xy ein Wendungspunkt ist.

§. 211.

Wir wollen jetzt annehmen, dass $f(x)$ und $f'(x)$ in der Nähe von x stetig sind, dass aber $f''(x) = \pm \infty$, jedoch in der Nähe von $x + i$, wo i eine unendlich kleine positive Grösse bezeichnet, ebenfalls stetig ist.

Setzen wir nun $x - i = \xi$, $x + i = \xi'$; bezeichnen die den Abscissen ξ , ξ' entsprechenden Ordinaten der Curve durch v , v' ; die den Abscissen $\xi - \Delta x$, $\xi + \Delta x$ entsprechenden Ordinaten der Curve durch y' , Y' ; die denselben Abscissen entsprechenden Ordinaten der durch die Punkte ξv und $\xi' v'$ an die Curve gezogenen Tangente durch y'' , Y'' ; so ist ganz wie in §. 209.

$$y' = y'' + \frac{1}{2}f''(\xi - \varrho \Delta x) \cdot \Delta x^2, \quad Y' = Y'' + \frac{1}{2}f''(\xi' + \theta \Delta x) \cdot \Delta x^2.$$

Weil aber nach der Voraussetzung $f''(x) = \pm \infty$ ist; so muss diese Grösse die Form

$$f''(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

haben, und $\psi(x) = 0$, $\varphi(x) \geq 0$ seyn. Also ist für der Null unendlich nahe kommende Δx mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$\varphi(\xi - \varrho \Delta x) \geq 0, \quad \varphi(\xi + \theta \Delta x) \geq 0.$$

Ist dann die Function $\psi(x)$ so beschaffen, dass sie, indem sie für den Werth x der veränderlichen Grösse verschwindet, bei diesem Durchgange durch Null zugleich ihr Zeichen ändert, so ist für der Null unendlich nahe kommende Δx

$$\psi(\xi - \varrho \Delta x) \geq 0, \quad \psi(\xi + \theta \Delta x) \leq 0;$$

folglich offenbar mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$\frac{\varphi(\xi - \varrho \Delta x)}{\psi(\xi - \varrho \Delta x)} \geq 0, \quad \frac{\varphi(\xi + \theta \Delta x)}{\psi(\xi + \theta \Delta x)} \leq 0;$$

d. i. nach dem Obigen

$$f''(\xi - \varrho \Delta x) \geq 0, \quad f''(\xi + \theta \Delta x) \leq 0;$$

also

$$y' \geq y'', \quad Y' \leq Y''.$$

Ueberlegt man nun, dass, wenn i sich der Null nähert, die Punkte ξv und $\xi v'$ einander und dem Punkte xy immer näher rücken, und auch die durch die Punkte ξv und $\xi v'$ an die Curve gezogenen Tangenten immer genauer mit einander und der durch den Punkt xy an die Curve gezogenen Tangente zusammenfallen, und, wenn man nur i klein genug nimmt, mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit mit der durch den Punkt xy an die Curve gezogenen Tangente zusammenfallend gemacht werden können; so wird man sich mittelst des Vorhergehenden auf der Stelle überzeugen, dass der Punkt xy ein Wendungspunkt ist. Hieraus ergibt sich der folgende Satz:

Wenn $f(x)$ und $f'(x)$ in der Nähe von x stetig sind; wenn ferner

$$f''(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \pm \infty,$$

aber in der Nähe von $x + i$, wo i eine unendlich kleine positive Grösse bezeichnet, stetig ist, und die Function $\psi(x)$, wenn man $x - i$ und $x + i$ für x setzt, entgegengesetzte Vorzeichen erhält; so ist der Punkt xy ein Wendungspunkt.

§. 212.

Um also die Wendungspunkte einer Curve, deren Gleichung $y = f(x)$ ist, aufzufinden, wird man die reellen Wurzeln der Gleichungen

$$f''(x) = 0, f''(x) = \pm \infty$$

aufsuchen, wofern nämlich diese Gleichungen überhaupt reelle Wurzeln haben. Ist nun a eine reelle Wurzel einer dieser beiden Gleichungen; so wird man ferner untersuchen, ob die Functionen $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, jenachdem a eine reelle Wurzel der ersten oder der zweiten der beiden obigen Gleichungen ist, für $x = a$ auch den sämtlichen in §. 210. und §. 211. ausgesprochenen Bedingungen genügen. Nur nachdem man sich hiervon vollständig versichert hat, wird man sicher schliessen können, dass der, der Abscisse $x = a$ entsprechende Punkt der gegebenen Curve ein Wendungspunkt ist.

Für die Curve, deren Gleichung

$$y = f(x) = \frac{ax^2}{a^2 + x^2}$$

ist, ist

$$f'(x) = \frac{2a^3 x}{(a^2 + x^2)^2}, \quad f''(x) = \frac{2a^5 - 6a^3 x^2}{(a^2 + x^2)^3}.$$

Die Gleichung $f''(x) = \pm \infty$ giebt die Gleichung $a^2 + x^2 = 0$, welche offenbar keine reelle Wurzel hat. Die Gleichung $f''(x) = 0$ giebt die Gleichung

$$2a^5 - 6a^3 x^2 = 0, \quad a^2 - 3x^2 = 0,$$

welche die beiden reellen Wurzeln $x = \pm \frac{a}{\sqrt{3}}$ hat. Für beide Werthe von x genügen $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, wie sogleich erhellet, den in §. 210. ausgesprochenen Bedingungen vollständig, und die den Abscissen $\pm \frac{a}{\sqrt{3}}$ entsprechenden beiden Punkte der gegebenen Curve sind also Wendungspunkte, weil der dritte Differentialquotient für die in Rede stehenden Werthe von x nicht verschwindet, wie man findet, wenn man denselben entwickelt.

§. 213.

Wir nehmen jetzt wieder an, dass $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ in der Nähe von x stetig sind, so dass diese Grössen nicht bloss selbst endliche reelle völlig bestimmte Werthe haben, sondern auch endliche reelle völlig bestimmte Werthe behalten, wenn man x um eine unendlich kleine positive Grösse zu- oder abnehmen lässt, und wollen nun unter der Voraussetzung, dass $f''(x)$ nicht $= 0$ ist, Regeln aufzufinden suchen, mittelst welcher man beurtheilen kann, nach welcher Seite hin die Curve in dem Punkte xy concav und convex ist.

Zu dem Ende denken wir uns durch den Punkt xy wieder eine Tangente, deren Gleichung

$$u - f(x) = f'(x) \cdot (z - x)$$

ist, an die Curve gezogen.

Die den Abscissen $x - \Delta x$ und $x + \Delta x$ entsprechenden Ordinaten der Curve seyen y' und Y' ; die denselben Abscissen entsprechenden Ordinaten der Tangente seyen y'' und Y'' ; so ist

$$y' = f(x) - f'(x) \cdot \Delta x, \quad Y' = f(x) + f'(x) \cdot \Delta x,$$

und ganz wie in §. 209.

$$y' = y'' + \frac{1}{2} f''(x - \varrho \Delta x) \cdot \Delta x^2,$$

$$Y' = Y'' + \frac{1}{2} f''(x + \theta \Delta x) \cdot \Delta x^2.$$

Wir unterscheiden nun zwei Hauptfälle, jenachdem $f(x) \geq 0$ oder $f(x) = 0$ ist.

Sey also

$$\text{I. } f(x) \geq 0.$$

In diesem ersten Hauptfalle sind, weil nach der Voraussetzung $f''(x)$ nicht $= 0$ ist, wieder vier besondere Fälle zu unterscheiden, die wir nach der Reihe durchgehen wollen.

$$1. \quad f(x) > 0, \quad f''(x) > 0.$$

Weil $f''(x) > 0$ ist, so ist für der Null unendlich nahe kommende Δx auch

$$f''(x - \varrho \Delta x) > 0, \quad f''(x + \theta \Delta x) > 0,$$

und folglich

$$y' > y'', \quad Y' > Y''.$$

Diesem Falle entspricht *Fig. 8*, und man sieht also, dass in demselben die Curve in dem Punkte xy gegen die Abscissenaxe convex ist.

$$2. \quad f(x) > 0, \quad f''(x) < 0.$$

Weil $f''(x) < 0$ ist, so ist für der Null unendlich nahe kommende Δx auch

$$f''(x - \varrho \Delta x) < 0, \quad f''(x + \theta \Delta x) < 0,$$

und folglich

$$y' < y'', \quad Y' < Y''.$$

Diesem Falle entspricht *Fig. 9*, und man sieht also, dass in demselben die Curve in dem Punkte xy gegen die Abscissenaxe concav ist.

$$3. \quad f(x) < 0, \quad f''(x) > 0.$$

Weil $f''(x) > 0$ ist, so ist für der Null unendlich nahe kommende Δx auch

$$f''(x - \varrho \Delta x) > 0, \quad f''(x + \theta \Delta x) > 0,$$

und folglich

$$y' > y'', \quad Y' > Y''.$$

Diesem Falle entspricht *Fig. 10*, und man sieht also, dass in demselben die Curve in dem Punkte xy gegen die Abscissenaxe concav ist.

$$4. \quad f(x) < 0, \quad f''(x) < 0.$$

Weil $f''(x) < 0$ ist, so ist für der Null unendlich nahe kommende Δx auch

$$f''(x - \varrho \Delta x) < 0, \quad f''(x + \theta \Delta x) < 0,$$

und folglich

$$y' < y'', \quad Y' < Y''.$$

Diesem Falle entspricht *Fig. 11.*, und man sieht also, dass in demselben die Curve in dem Punkte xy gegen die Abscissenaxe convex ist.

Fasst man das Vorhergehende zusammen; so ergibt sich folgender Lehrsatz:

Wenn $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ in der Nähe von x stetig sind, und weder $f(x)$, noch $f''(x) = 0$ ist; so ist die Curve in dem Punkte xy gegen die Abscissenaxe jederzeit concav oder convex, jenachdem $f'(x)$ und $f''(x)$ ungleiche oder gleiche Vorzeichen haben.

$$\text{II. } f(x) = 0.$$

In diesem Falle ist

$$y' = -f'(x) \cdot \Delta x, \quad Y' = +f'(x) \cdot \Delta x,$$

und wir haben jetzt wieder zunächst zwei Fälle zu unterscheiden, jenachdem $f'(x) \geq 0$ oder $f'(x) = 0$ ist.

Sey also

$$a \cdot f'(x) \geq 0.$$

Im Allgemeinen bemerken wir zuvörderst, dass in den Figuren, welche wir in diesem Falle zur Veranschaulichung der analytischen Betrachtungen zeichnen werden, die positiven Abscissen immer als von der linken nach der rechten Seite hin, die positiven Ordinaten als von unten nach oben hin genommen gedacht werden müssen, und unterscheiden nun wieder die folgenden vier Fälle.

$$1. \quad f'(x) > 0, \quad f''(x) > 0.$$

Weil $f''(x) > 0$ ist, so ist für der Null unendlich nahe kommende Δx auch

$$f''(x - \varrho \Delta x) > 0, \quad f''(x + \theta \Delta x) > 0,$$

und folglich

$$y' > y'', \quad Y' > Y''.$$

Weil nun ferner $f'(x) > 0$ und

$$y' = -f'(x) \cdot \Delta x, \quad Y' = +f'(x) \cdot \Delta x$$

ist; so entspricht diesem Falle offenbar *Fig. 12*, und man sieht also, dass in demselben die Curve in dem Punkte xy nach der Seite der positiven Abscissen hin convex ist.

$$2. \quad f'(x) > 0, \quad f''(x) < 0.$$

Weil $f''(x) < 0$ ist, so ist für der Null unendlich nahe kommende Δx auch

$$f''(x - \varrho \Delta x) < 0, \quad f''(x + \theta \Delta x) < 0,$$

und folglich

$$y' < y'', \quad Y' < Y''.$$

Weil nun ferner $f'(x) > 0$ und

$$y'' = -f'(x) \cdot \Delta x, \quad Y'' = +f'(x) \cdot \Delta x$$

ist; so entspricht diesem Falle offenbar *Fig. 13*, und man sieht also, dass in demselben die Curve in dem Punkte xy nach der Seite der positiven Abscissen hin concav ist.

$$3. \quad f'(x) < 0, \quad f''(x) > 0.$$

Weil $f''(x) > 0$ ist, so ist für der Null unendlich nahe kommende Δx auch

$$f''(x - \varrho \Delta x) > 0, \quad f''(x + \theta \Delta x) > 0,$$

und folglich

$$y' > y'', \quad Y' > Y''.$$

Weil nun ferner $f'(x) < 0$ und

$$y'' = -f'(x) \cdot \Delta x, \quad Y'' = +f'(x) \cdot \Delta x$$

ist; so entspricht diesem Falle offenbar *Fig. 14*, und man sieht also, dass in demselben die Curve in dem Punkte xy nach der Seite der positiven Abscissen hin concav ist.

$$4. \quad f'(x) < 0, \quad f''(x) < 0.$$

Weil $f''(x) < 0$ ist, so ist für der Null unendlich nahe kommende Δx auch

$$f''(x - \varrho \Delta x) < 0, \quad f''(x + \theta \Delta x) < 0,$$

und folglich

$$y' < y'', \quad Y' < Y''.$$

Weil nun ferner $f'(x) < 0$ und

$$y'' = -f'(x) \cdot \Delta x, \quad Y'' = +f'(x) \cdot \Delta x$$

ist; so entspricht diesem Falle offenbar *Fig. 15*, und man sieht also, dass in demselben die Curve in dem Punkte xy nach der Seite der positiven Abscissen hin convex ist.

Fasst man nun das Vorhergehende zusammen; so ergibt sich folgender Lehrsatz:

Wenn $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ in der Nähe von x stetig sind, und $f(x) = 0$, aber weder $f'(x)$, noch $f''(x) = 0$ ist; so ist die Curve in dem Punkt xy nach der Seite der positiven Abscissen hin concav oder convex, jenachdem $f'(x)$ und $f''(x)$ ungleiche oder gleiche Vorzeichen haben.

$$b. \quad f'(x) = 0.$$

Ueberlegt man, dass in diesem Falle die Gleichung der durch den Punkt xy an die Curve gezogenen Tangente $u = 0$ ist, so dass also diese Tangente die Abscissenaxe ist; so wird man sich, wenn man hierzu noch nimmt, dass jetzt

$$y' = \frac{1}{2}f''(x - \epsilon \Delta x) \cdot \Delta x^2, \quad Y' = \frac{1}{2}f''(x + \theta \Delta x) \cdot \Delta x^2$$

ist, sehr leicht von der Richtigkeit des folgenden Satzes überzeugen:

Wenn $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ stetig sind, und sowohl $f'(x)$, als auch $f''(x) = 0$, aber $f'''(x)$ nicht $= 0$ ist; so ist die Curve in dem Punkte xy nach der Seite der positiven Ordinaten hin concav oder convex, jenachdem $f'''(x)$ positiv oder negativ ist.

§. 214.

I. Wir wollen jetzt die Curve, deren Gleichung

$$y = f(x) = x + \sqrt[3]{(x-a)^3}$$

ist, wo a eine positive Grösse bezeichnen soll, etwas näher betrachten.

Jeder Abscisse, welche grösser als a ist, entsprechen, weil die Quadratwurzel positiv und negativ genommen werden kann, zwei reelle Ordinaten. Für $x = a$ werden diese beiden Ordinaten $= a$, und fallen daher in eine zusammen. Für alle Abscissen, die kleiner als a sind, sind die Ordinaten imaginär.

Hieraus sieht man, dass unsere Curve aus zwei in dem, durch die Coordinaten $x = a$, $y = a$ bestimmten Punkte, welchen wir der Kürze wegen durch P bezeichnen wollen, zusammenstossenden, ganz auf einer Seite dieses Punktes liegenden Zweigen besteht.

Durch Differentiation findet man

$$f'(x) = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{x-a},$$

und schliesst hieraus leicht, dass die beiden Zweige unserer Curve in dem Punkte P eine gemeinschaftliche Tangente haben, deren Gleichung $u - a = z - a$ oder $u = z$ ist, und die also offenbar durch den Anfang der Coordinaten geht, und gegen die Abscissenaxe unter einem Winkel von 45° geneigt ist, wenn nämlich die Coordinaten rechtwinklige sind.

Durch fernere Differentiation ergibt sich

$$f''(x) = \frac{3}{4\sqrt{x-a}}.$$

Bezeichnet also i eine unendlich kleine positive Grösse; so ist

$$f''(a+i) = \frac{3}{4\sqrt{i}},$$

und der dem einen Zweige der Curve entsprechende Werth von $f''(a+i)$ ist folglich positiv, der dem andern Zweige entsprechende Werth dagegen negativ. Also ist nach §. 213. in dem Punkte P , oder wenigstens in dessen Nähe, der eine Zweig der Curve gegen die Abscissenaxe convex, der andere dagegen ge-

gen die Abscissenaxe concav, und die Curve wird daher in der Nähe des Punktes P offenbar die in *Fig. 16.* dargestellte Gestalt haben.

Einen solchen Punkt, wie vorher der Punkt P war, in welchem zwei ganz auf einer Seite desselben liegende Zweige einer Curve, die in dem Punkte P eine gemeinschaftliche Tangente haben und in der Nähe des Punktes P ihre convexen Seiten gegen einander kehren, zusammenstossen, nennt man eine Spitze oder einen Rückkehrpunkt der ersten Art.

II. Wir wollen ferner auch die Curve, deren Gleichung

$$y = f(x) = x^2 + \sqrt[5]{(x-a)^5}$$

ist, etwas näher betrachten.

Auch diese Curve besteht, wie sogleich erhellet, aus zwei in dem durch die Coordinaten $x = a$, $y = a^2$ bestimmten Punkte, welcher im Folgenden der Kürze wegen durch Q bezeichnet werden mag, zusammenstossenden, ganz auf einer Seite des Punktes Q liegenden Zweigen.

Durch Differentiation ergibt sich

$$f'(x) = 2x + \frac{5}{2} \sqrt[5]{(x-a)^3},$$

und man sieht also, dass die beiden Zweige der Curve in dem Punkte Q eine gemeinschaftliche Tangente haben, deren Gleichung

$$u = a(2z - a)$$

ist.

Durch fernere Differentiation erhält man

$$f''(x) = 2 + \frac{15}{4} \sqrt[5]{x-a},$$

und folglich, wenn i eine unendlich kleine positive Grösse bezeichnet,

$$f''(a+i) = 2 + \frac{15}{4} \sqrt[5]{i},$$

so dass also $f''(a+i)$ für beide Zweige der Curve positiv ist, und daher, weil die Ordinate des Punktes Q auch positiv, nämlich $= a^2$ ist, nach §. 213. in der Nähe des Punktes Q beide Zweige der Curve gegen die Abscissenaxe convex sind, woraus sich also ergibt, dass die Curve in der Nähe des Punktes Q die in *Fig. 17.* dargestellte Gestalt hat.

Einen solchen Punkt, wie vorher der Punkt Q war, in welchem zwei ganz auf einer Seite desselben liegende Zweige einer Curve, die in dem Punkte Q eine gemeinschaftliche Tangente haben und beide nach derselben Seite hin concav und convex sind, zusammenstossen, nennt man eine Spitze oder einen Rückkehrpunkt der zweiten Art.

§. 215.

Lehrsatz. xy soll ein beliebiger, aber bestimmter Punkt einer durch die Gleichung $y = f(x)$ zwi-

schen rechtwinkligen Coordinaten characterisirten Curve, und die Grössen $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ sollen in der Nähe von x stetig seyn, so dass diese Grössen nicht bloss selbst endliche reelle völlig bestimmte Werthe haben, sondern auch endliche reelle völlig bestimmte Werthe behalten, wenn man x um eine unendlich kleine positive Grösse zu- oder abnehmen lässt; auch soll $f''(x)$ nicht $= 0$ seyn. Unter diesen Voraussetzungen kann man behaupten, dass der dem Punkte xy entsprechende Krümmungskreis der in Rede stehenden Curve immer auf der concaven Seite dieser Curve liegt.

Beweis. Wir unterscheiden bei dem Beweise dieses Satzes wie in §. 213. wieder die folgenden Fälle.

$$\text{I. } f(x) \geq 0.$$

Bezeichnen α , β die Coordinaten des Mittelpunkts des Krümmungskreises; so ist nach §. 201. 11.

$$\alpha = x - \frac{1 + \{f'(x)\}^2}{f''(x)} f'(x), \quad \beta = y + \frac{1 + \{f'(x)\}^2}{f''(x)},$$

und wir haben nun ferner die folgenden Fälle zu unterscheiden.

$$1. \quad f(x) > 0, \quad f''(x) > 0.$$

Nach §. 213. entspricht diesem Falle *Fig. 18*. Nach der obigen Formel für β ist aber $\beta > y$. Also liegt in diesem Falle der Krümmungskreis in dem Punkte xy offenbar auf der concaven Seite der Curve.

$$2. \quad f(x) > 0, \quad f''(x) < 0.$$

Nach §. 213. entspricht diesem Falle *Fig. 19*. Nach der obigen Formel für β ist aber $\beta < y$. Also liegt in diesem Falle der Krümmungskreis in dem Punkte xy wieder offenbar auf der concaven Seite der Curve.

$$3. \quad f(x) < 0, \quad f''(x) > 0.$$

Nach §. 213. entspricht diesem Falle *Fig. 20*. Nach der obigen Formel für β ist aber $\beta > y$. Also liegt in diesem Falle der Krümmungskreis in dem Punkte xy wieder auf der concaven Seite der Curve, wovon man sich auf der Stelle überzeugen wird, wenn man nur überlegt, dass $y = f(x)$ in diesem Falle negativ ist.

$$4. \quad f(x) < 0, \quad f''(x) < 0.$$

Nach §. 213. entspricht diesem Falle *Fig. 21*. Nach der obigen Formel für β ist aber $\beta < y$. Also liegt in diesem Falle, wo $y = f(x)$ negativ ist, der Krümmungskreis in dem Punkte xy wieder offenbar auf der concaven Seite der Curve.

In jeder der Figuren, auf welche wir uns vorher bezogen haben, ist absichtlich auch die Normale des Punktes xy oder P

gezeichnet worden, weil die Deutlichkeit des Beweises sehr erhöht wird, wenn man sich erinnert, dass nach §. 202. der Mittelpunkt des dem Punkte xy entsprechenden Krümmungskreises jederzeit auf der durch den Punkt xy gezogenen Normale der Curve liegt.

$$\text{II. } f(x) = 0.$$

In diesem Falle sind wieder die beiden folgenden besondern Fälle zu unterscheiden.

$$a. \quad f'(x) \gtrless 0.$$

Weil $y = f(x) = 0$ ist; so ist in diesem Falle

$$\alpha = x - \frac{1 + \{f'(x)\}^2}{f''(x)} f'(x), \quad \beta = \frac{1 + \{f'(x)\}^2}{f''(x)}.$$

Sey nun ferner

$$1. \quad f'(x) > 0, \quad f''(x) > 0.$$

Nach §. 213. entspricht diesem Falle, wenn immer die positiven Abscissen von der linken nach der rechten Seite hin, die positiven Ordinaten von unten nach oben hin genommen werden, *Fig. 22.* Nach den obigen Formeln für α und β ist aber $\alpha < x$, $\beta > 0$. Also liegt der Krümmungskreis in diesem Falle offenbar auf der concaven Seite der Curve.

$$2. \quad f'(x) > 0, \quad f''(x) < 0.$$

Nach §. 213. entspricht diesem Falle *Fig. 23.* Nach den obigen Formeln für α und β ist $\alpha > x$, $\beta < 0$. Folglich liegt der Krümmungskreis in diesem Falle wieder offenbar auf der concaven Seite der Curve.

$$3. \quad f'(x) < 0, \quad f''(x) > 0.$$

Nach §. 213. entspricht diesem Falle *Fig. 24.* Ferner ist $\alpha > x$, $\beta > 0$. Also liegt der Krümmungskreis offenbar wieder auf der concaven Seite der Curve.

$$4. \quad f'(x) < 0, \quad f''(x) < 0.$$

Nach §. 213. entspricht diesem Falle *Fig. 25.* Ferner ist $\alpha < x$, $\beta < 0$. Also liegt der Krümmungskreis offenbar wieder auf der concaven Seite der Curve.

$$b. \quad f'(x) = 0.$$

In diesem Falle ist

$$\alpha = x, \quad \beta = \frac{1}{f''(x)}.$$

Sey nun ferner

$$1. \quad f''(x) > 0.$$

Nach §. 213. entspricht diesem Falle *Fig. 26.* Ferner ist $\alpha = x$, $\beta > 0$. Also liegt der Krümmungskreis offenbar auf der concaven Seite der Curve.

$$2. \quad f''(x) < 0.$$

Nach §. 213. entspricht diesem Falle *Fig.* 27. Ferner ist $\alpha = x$, $\beta < 0$. Also liegt der Krümmungskreis auf der concaven Seite der Curve.

Man sieht also, dass der Krümmungskreis in allen Fällen auf der concaven Seite der Curve liegt, so dass durch das Vorhergehende unser Satz vollständig bewiesen ist.

§. 216.

Durch den im vorigen Paragraphen bewiesenen Satz wird die Bestimmung des einem gewissen Punkte xy einer Curve entsprechenden Krümmungskreises erleichtert. Man braucht nämlich bloss die Grösse des Krümmungshalbmessers zu berechnen, die Normale des Punktes xy zu ziehen, und auf derselben von dem Punkte xy an auf der concaven Seite der Curve ein dem Krümmungshalbmesser gleiches Stück abzuschneiden; so ist der Endpunkt dieses Stücks der Mittelpunkt des Krümmungskreises, der sich nun leicht beschreiben lässt.

Die Formel für den Krümmungshalbmesser des Punktes xy ist nach §. 201.

$$\rho = \pm \frac{\left\{ 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}},$$

und man muss in dieser Formel, weil der Krümmungshalbmesser seiner Natur nach nur positiv seyn kann, das obere oder untere Zeichen nehmen, jenachdem der zweite Differentialquotient positiv oder negativ ist. Oefters, namentlich in älteren Schriften, findet man indess für den Krümmungshalbmesser die Formel

$$\rho = - \frac{\left\{ 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}.$$

Der Grund dieser übrigens, wie es uns scheint, durchaus nicht der Natur der Sache gemässen Einrichtung der Formel für den Krümmungshalbmesser ist folgender.

Wenn y positiv und $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ negativ ist; so ist nach §. 213. die Curve in dem Punkte xy gegen die Abscissenaxe concav. Damit nun für solche Punkte, deren Ordinate positiv, und in denen die Curve gegen die Abscissenaxe concav ist, der Krümmungshalbmesser positiv werde, hat man der Formel für denselben die obige Gestalt gegeben. Seiner Natur nach ist aber, wie schon mehrmals erinnert worden ist, der Krümmungshalbmesser immer positiv, oder es kommt überhaupt in allen Fällen bloss auf den absoluten Werth desselben an, und wir haben diese Bemerkung hier auch bloss deshalb eingeschaltet, weil sich

die Formel für den Krümmungshalbmesser, wie schon erwähnt worden ist, in vielen ältern wichtigen Schriften unter der in Rede stehenden Gestalt findet.

Aus §. 210. und §. 211., und aus der Formel für den Krümmungshalbmesser erhellet, dass in einem Wendungspunkte der Krümmungshalbmesser unendlich oder null ist.

D. Evolution oder Abwicklung der Curven.

§. 217.

Um die convexe Seite der Curve AB (Fig. 28.) denke man sich einen völlig biegsamen Faden gelegt, und in B nach der durch diesen Punkt gehenden Tangente der Curve ausgespannt. Wird nun dieser Faden, indem man ihn immer gespannt erhält, nach und nach von der Curve AB abgewickelt; so wird sein Endpunkt C eine Curve CD beschreiben, welche man die durch Abwicklung der Curve AB Erzeugte oder die *Evolvente* von AB nennt. Umgekehrt heisst AB die *Evolute* von CD , d. i. die Curve, durch deren Abwicklung die Curve CD entsteht.

§. 218.

Die Evolute wird von der Richtung des Fadens stets berührt. Ist nun P ein beliebiger Punkt der Evolute und PP' die Richtung des Fadens in diesem Punkte, P' der Endpunkt des Fadens, also P' ein Punkt der Evolvente; so sollen P und P' zusammengehörende oder einander entsprechende Punkte der Evolute und Evolvente genannt werden.

Dass immer $PP' = BC + BP$, d. i., wenn wir die constante Linie $BC = a$, den Bogen $BP = s$ setzen, $PP' = a + s$ ist, folgt aus der Natur der Evolution von selbst.

Der allgemeinen Theorie der Evolution muss zuerst die folgende Betrachtung vorausgeschickt werden.

§. 219.

Es sey xy ein beliebiger Punkt einer durch die Gleichung $y = f(x)$ zwischen rechtwinkligen Coordinaten characterisirten Curve.

Denkt man sich nun einen beliebigen, aber bestimmten Punkt dieser Curve als Anfangspunkt aller Bogen derselben, und bezeichnet den bei diesem gemeinschaftlichen Anfangspunkte anfangenden, bei dem Punkte xy sich endigenden, immer als positiv zu betrachtenden Bogen durch s ; so ist kein Zweifel, dass s eine Function der Abscisse x ist, und man wird nun offenbar auch nach dem Differential oder dem Differentialquotienten dieses als Function von x betrachteten Bogens in Bezug auf x als unabhängige veränderliche Grösse fragen können.

Um für das Differential des Bogens s einen allgemeinen Ausdruck zu finden, lasse man x sich um Δx verändern; so wird sich y um Δy , s um Δs verändern. Die Sehne der gegebenen Curve, welche die Endpunkte der Ordinaten y und $y + \Delta y$ mit einander verbindet, sey σ ; so ist nach Principien der analytischen Geometrie

$$\sigma^2 = (x + \Delta x - x)^2 + (y + \Delta y - y)^2,$$

d. i.

$$\sigma^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$$

oder

$$\left(\frac{\sigma}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2.$$

Nach §. 110. II. ist aber, wenn ϱ einen positiven echten Bruch bezeichnet,

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \frac{1}{2} f''(x + \varrho \Delta x) \cdot \Delta x^2$$

oder

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \frac{1}{2} f''(x + \varrho \Delta x) \cdot \Delta x;$$

folglich

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 = \{f'(x)\}^2 + f'(x) \cdot f''(x + \varrho \Delta x) \cdot \Delta x + \frac{1}{4} \{f''(x + \varrho \Delta x)\}^2 \cdot \Delta x^2;$$

also nach dem Obigen

$$\left(\frac{\sigma}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \{f'(x)\}^2 + f'(x) \cdot f''(x + \varrho \Delta x) \cdot \Delta x + \frac{1}{4} \{f''(x + \varrho \Delta x)\}^2 \cdot \Delta x^2,$$

wobei wir annehmen, dass $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ in der Nähe von x stetig sind.

Weil nun $f''(x + \varrho \Delta x)$ sich, wenn Δx sich der Null nähert, immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade der Grösse $f''(x)$ nähert; so nähert sich offenbar $\left(\frac{\sigma}{\Delta x}\right)^2$, wenn Δx sich der Null nähert, immer mehr und mehr und bis zu jedem beliebigen Grade der Grösse $1 + \{f'(x)\}^2$, und es ist also

$$\lim \left\{ \left(\frac{\sigma}{\Delta x}\right)^2 \right\} = 1 + \{f'(x)\}^2.$$

Da nun aber, wenn Δx sich der Null nähert, σ und der absolute Werth von Δs sich immer mehr und mehr und bis jedem beliebigen Grade nähern; so muss sich natürlich $\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2$, wenn Δx sich der Null nähert, derselben Gränze wie $\left(\frac{\sigma}{\Delta x}\right)^2$ nähern, und es ist also

$$\lim \left\{ \left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 \right\} = 1 + \{f'(x)\}^2.$$

Weil nun aber nach dem allgemeinen Begriffe des Differentialquotienten

$$\lim \frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{\partial s}{\partial x},$$

und folglich offenbar

$$\lim \left\{ \left(\frac{\Delta s}{\Delta x} \right)^2 \right\} = \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2$$

ist; so ist

$$\left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 = 1 + \{f'(x)\}^2,$$

oder

$$\left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 = 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2,$$

oder

$$\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2.$$

Weitere Betrachtungen über diese wichtige Gleichung gehören jetzt nicht hierher; wir werden aber späterhin (in der Integralrechnung) auf dieselbe zurückkommen.

§. 220.

Die ganze Theorie der Evolution kommt auf einige Hauptgleichungen zurück, welche wir jetzt entwickeln wollen.

Die Coordinaten zweier zusammengehörenden Punkte P und P' der Evolute und Evolvente, welche wir jetzt immer rechtwinklig annehmen, seyen x, y und x', y' . Die Linie PP' sey $= \theta$, die constante Linie BC sey $= a$, der Bogen BP sey $= s$, wobei es kaum noch einer besondern Erwähnung bedarf, dass a, θ, s stets positive Grössen sind.

Die Gleichung der Linie PP' , welche die Evolute in dem Punkte xy berührt, ist nach §. 181.

$$1. \quad u - y = \frac{\partial y}{\partial x} (z - x).$$

Hieraus ergibt sich, weil die Linie PP' durch den Punkt $x'y'$ geht, ferner unmittelbar die Gleichung

$$2. \quad y' - y = \frac{\partial y}{\partial x} (x' - x).$$

Nach §. 218. ist

$$3. \quad \theta = a + s, \quad \partial \theta = \partial s,$$

und folglich nach §. 219.

$$4. \quad \partial \theta^2 = \partial x^2 + \partial y^2;$$

also

$$5. \quad \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 = 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2, \quad \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 = 1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)^2.$$

Nach Principien der analytischen Geometrie ist nun, weil xy und $x'y'$ die Endpunkte der Linie θ sind,

$$6. (x' - x)^2 + (y' - y)^2 = \theta^2.$$

Folglich ist nach 2.

$$7. \begin{cases} (x' - x)^2 \left\{ 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right\} = \theta^2, \\ (y' - y)^2 \left\{ 1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)^2 \right\} = \theta^2; \end{cases}$$

d. i. nach 5.

$$8. (x' - x)^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 = \theta^2, \quad (y' - y)^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 = \theta^2;$$

oder

$$9. (x' - x)^2 = \left(\frac{\theta \partial x}{\partial \theta} \right)^2, \quad (y' - y)^2 = \left(\frac{\theta \partial y}{\partial \theta} \right)^2.$$

Weil aber nach 2.

$$\frac{y' - y}{x' - x} = \frac{\partial y}{\partial x}$$

ist; so ist mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

$$10. x' - x = \pm \frac{\theta \partial x}{\partial \theta}, \quad y' - y = \pm \frac{\theta \partial y}{\partial \theta},$$

wo sich nun noch fragt, ob in diesen Gleichungen die obern oder untern Zeichen zu nehmen sind.

Diese Frage lässt sich auf folgende Art beantworten.

Man denke sich durch den Punkt P als Anfangspunkt zwei primitiven parallele neue Coordinatenaxen gelegt; so ist nach den bekannten allgemeinen Formeln der Coordinatenverwandlung $x' - x$ die Abscisse des Punktes P' in Bezug auf dieses neue Coordinatensystem.

Bezeichnet nun φ den von der Linie θ mit dem positiven Theile der neuen Abscissenaxe eingeschlossenen Winkel, indem man diesen Winkel von dem positiven Theile der neuen Abscissenaxe an nach dem positiven Theile der neuen Ordinatenaxe hin von 0 bis 360° zählt; so ist offenbar

$$11. x' - x = \theta \cos \varphi.$$

Bezeichnen wir ferner den Winkel, welchen das der Null unendlich nahe kommende Differential ∂s des Bogens s mit dem positiven Theile der neuen Abscissenaxe einschliesst, indem dieser Winkel wieder von dem positiven Theile der neuen Abscissenaxe an nach dem positiven Theile der neuen Ordinatenaxe hin von 0 bis 360° gezählt wird, durch ψ , den absoluten Werth des Differentials ∂s aber durch σ ; so ist offenbar

$$12. \partial x = \sigma \cos \psi.$$

Ist nun zuerst ∂s negativ; so ist, wie aus der Natur der Evolution unmittelbar folgt, $\psi = \varphi$ und also $\cos \psi = \cos \varphi$. Weil aber in diesem Falle $\sigma = -\partial s$ ist; so ist nach 12.

$$\partial x = -\cos \varphi \cdot \partial s.$$

Ist ferner ∂s positiv, so ist offenbar entweder $\psi - \varphi = 180^\circ$, oder $\varphi - \psi = 180^\circ$; d. i. entweder $\psi = \varphi + 180^\circ$, oder $\psi = \varphi - 180^\circ$; also immer $\cos \psi = -\cos \varphi$. Weil nun in diesem Falle $\sigma = \partial s$ ist; so ist wieder nach 12.

$$\partial x = -\cos \varphi \cdot \partial s.$$

Also ist allgemein

$$13. \partial x = -\cos \varphi \cdot \partial s.$$

Aus den Gleichungen 11. und 13. ergibt sich, wenn man $\cos \varphi$ eliminirt, sehr leicht

$$x' - x = -\frac{\theta \partial x}{\partial s},$$

oder, weil $\partial s = \partial \theta$ ist,

$$x' - x = -\frac{\theta \partial x}{\partial \theta}.$$

Hieraus sieht man, dass man in den Gleichungen 10. die untern Zeichen nehmen muss, und dass also

$$14. x' - x = -\frac{\theta \partial x}{\partial \theta}, \quad y' - y = -\frac{\theta \partial y}{\partial \theta}.$$

zu setzen ist.

Aus 6. folgt durch Differentiation

$$(x' - x)(\partial x' - \partial x) + (y' - y)(\partial y' - \partial y) = \theta \partial \theta;$$

also nach 14.

$$-(\partial x' - \partial x) \partial x - (\partial y' - \partial y) \partial y = \partial \theta^2,$$

d. i. nach 4.

$$-(\partial x' - \partial x) \partial x - (\partial y' - \partial y) \partial y = \partial x^2 + \partial y^2,$$

und folglich, wenn man aufhebt, was sich aufheben lässt;

$$15. \partial x \partial x' + \partial y \partial y' = 0$$

oder

$$16. \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\partial x'}{\partial y'}.$$

Durch Differentiation der ersten der beiden Gleichungen 14. ergibt sich, wenn man nach x differentiirt, und also ∂x als constant betrachtet,

$$\partial x' - \partial x = \frac{\theta \partial x \partial^2 \theta}{\partial \theta^2} - \partial x,$$

d. i.

$$17. \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\theta \partial^2 \theta}{\partial \theta^2}, \quad \frac{\partial x}{\partial x'} = \frac{\partial \theta^2}{\theta \partial^2 \theta}.$$

Mittelst der hier entwickelten Formeln lassen sich nun leicht die beiden folgenden Sätze beweisen.

§. 221.

Lehrsatz. Die Linie PP' (Fig. 28.) ist jederzeit die Normale der Evolvente in dem Punkte P' .

Beweis. Die Gleichung der Linie PP' ist, wenn wieder x, y und x', y' die rechtwinkligen Coordinaten der Punkte P und P' sind, nach §. 220. 1.

$$u - y = \frac{\partial y}{\partial x} (z - x).$$

Weil aber diese Linie durch den Punkt $x'y'$ geht; so ist

$$y' - y = \frac{\partial y}{\partial x} (x' - x),$$

und folglich durch Subtraction der beiden vorhergehenden Gleichungen

$$u - y' = \frac{\partial y}{\partial x} (z - x').$$

Nach §. 220. 16. ist aber

$$\frac{\partial y}{\partial x} = - \frac{\partial x'}{\partial y'}.$$

Also ist

$$u - y' = - \frac{\partial x'}{\partial y'} (z - x')$$

die Gleichung der Linie PP' , und diese Linie ist folglich nach §. 183. offenbar die Normale der Evolvente in dem Punkte $x'y'$ oder P' , wie bewiesen werden sollte.

§. 222.

Lehrsatz. Die Linie PP' (Fig. 28.) ist jederzeit dem Krümmungshalbmesser der Evolvente in dem Punkte P' gleich.

Beweis. Die rechtwinkligen Coordinaten der Punkte P und P' seyen wieder x, y und x', y' ; die Linie PP' sey $= \theta$; der Krümmungshalbmesser der Evolvente in dem Punkte $x'y'$ sey $= \rho$; so ist, wenn wir der Kürze wegen

$$p = \frac{\partial y'}{\partial x'}, \quad p' = \frac{\partial^2 y'}{\partial x'^2}$$

setzen, nach §. 201.

$$1. \quad \rho = \frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p'},$$

wenn wir bloss den absoluten Werth der Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens berücksichtigen.

Weil nun nach §. 220. 16.

$$p = \frac{\partial y'}{\partial x'} = - \frac{\partial x}{\partial y}$$

ist; so ist

$$2. \quad 1 + p^2 = \frac{\partial x^2 + \partial y^2}{\partial y^2} = \frac{\partial \theta^2}{\partial y^2}.$$

Ferner ist

$$\partial p = - \partial \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right) = \frac{\partial x \partial^2 y}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial x'} = p' = \frac{\partial x \partial^2 y}{\partial x' \partial y^2};$$

und folglich, weil nach §. 220. 17.

$$\frac{\partial x}{\partial x'} = \frac{\partial \theta^2}{\partial \theta^2 \theta}$$

ist,

$$3. \quad p' = \frac{\partial \theta^2 \partial^2 y}{\partial \theta^2 \theta \partial y^2}.$$

Also ist nach 1., 2. und 3.

$$4. \quad \varrho = \theta \frac{\partial \theta \partial^2 \theta}{\partial y \partial^2 y}.$$

Durch Differentiation der Gleichung

$$\partial \theta^2 = \partial x^2 + \partial y^2$$

ergiebt sich aber, weil ∂x constant ist,

$$5. \quad \partial \theta \partial^2 \theta = \partial y \partial^2 y.$$

Also ist nach 4.

$$\varrho = \theta,$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 223.

Weil nach §. 202. der Mittelpunkt des Krümmungskreises einer Curve in einem gewissen Punkte derselben immer auf der durch diesen Punkt gehenden Normale der Curve, und nach §. 215. immer auf der concaven Seite der Curve liegt; so ergibt sich aus §. 221. und §. 222. unmittelbar der folgende wichtige Satz:

Die Evolute ist jederzeit der geometrische Ort der Mittelpunkte der Krümmungskreise aller Punkte der Evolvente.

Mit Hülfe dieses Satzes lässt sich die folgende Aufgabe auflösen.

§. 224.

Aufgabe. Aus der Gleichung der Evolvente die Gleichung der Evolute zu finden.

Auflösung. Die Gleichung der Evolvente zwischen rechtwinkligen Coordinaten, welche als gegeben angesehen wird, sey

$$1. \quad \varphi(x', y') = 0.$$

Ist nun xy der dem Punkte $x'y'$ der Evolvente entsprechende Punkt der Evolute; so ist nach §. 201., weil nach §. 223. die Evolute der geometrische Ort der Mittelpunkte der Krümmungskreise der Evolvente ist,

$$2. \quad x = x' - \frac{\left\{ 1 + \left(\frac{\partial y'}{\partial x'} \right)^2 \right\} \frac{\partial y'}{\partial x'}}{\frac{\partial^2 y'}{\partial x'^2}}, \quad y = y' + \frac{1 + \left(\frac{\partial y'}{\partial x'} \right)^2}{\frac{\partial^2 y'}{\partial x'^2}}.$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen und der Gleichung 1. die Grössen x', y' ; so erhält man eine Gleichung zwischen x und y , welche die gesuchte Gleichung der Evolute ist.

§. 225.

Wir wollen z. B. die Evolute der Cycloide zu bestimmen suchen.

Die Gleichungen der Cycloide sind nach §. 192.

$$x' = r(\varphi - \sin \varphi), \quad y' = r(1 - \cos \varphi).$$

Also ist

$$\partial x' = r(1 - \cos \varphi) \partial \varphi, \quad \partial y' = r \sin \varphi \partial \varphi;$$

folglich

$$\frac{\partial y'}{\partial x'} = \frac{\sin \varphi}{1 - \cos \varphi}, \quad 1 + \left(\frac{\partial y'}{\partial x'} \right)^2 = \frac{2}{1 - \cos \varphi}.$$

Ferner ist nach §. 207.

$$\frac{\partial^2 y'}{\partial x'^2} = - \frac{1}{4r \sin \frac{1}{2} \varphi^4} = - \frac{1}{r(1 - \cos \varphi)^2}.$$

Folglich sind nach §. 224., wie man hieraus leicht findet, die gesuchten Gleichungen der Evolute

$$x = r(\varphi + \sin \varphi), \quad y = -r(1 - \cos \varphi).$$

Ist nun in *Fig. 29.* ASB die gegebene Cycloide; so verlängere man die Axe SC über C hinaus, mache $CA' = CS = 2r$, ziehe durch A' eine Parallele mit der Basis AB , nehme diese Parallele als Axe, A' als Anfang der Abscissen an, und nehme die positiven Abscissen von A' an nach der linken Seite hin, die positiven Ordinaten in dem neuen Systeme aber wie in dem primitiven in der Richtung von unten nach oben. Bezeichnen nun x'', y'' die Coordinaten in dem neuen Systeme; so ist offenbar

$$x = r\pi - x'', \quad y = y'' - 2r,$$

und folglich sind

$$r\pi - x'' = r(\varphi + \sin \varphi), \quad y'' - 2r = -r(1 - \cos \varphi);$$

oder

$$x'' = r(\pi - \varphi - \sin \varphi), \quad y'' = r(1 + \cos \varphi);$$

oder

$$x'' = r\{\pi - \varphi - \sin(\pi - \varphi)\}, \quad y'' = r\{1 - \cos(\pi - \varphi)\};$$

oder, wenn wir $\pi - \varphi = \psi$ setzen,

$$x'' = r(\psi - \sin \psi), \quad y'' = r(1 - \cos \psi)$$

die Gleichungen der Evolute in Bezug auf das secundäre System.

Vergleicht man diese Gleichungen nun mit den gegebenen Gleichungen der Cycloide; so wird leicht erhellen, dass die Evolute der halben Cycloide AS eine ihr gleiche halbe Cycloide $A'A$ in umgekehrter Lage ist.

Die Gleichung der Evolute der Ellipse und Hyperbel ist, indem sich immer die obern Zeichen auf die Ellipse, die untern auf die Hyperbel beziehen,

$$(ax)^{\frac{2}{3}} \pm (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 \mp b^2)^{\frac{2}{3}},$$

oder

$$\left(\frac{x}{b}\right)^{\frac{2}{3}} \pm \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{a}{b} \mp \frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Für die Evolute der Parabel findet man, wenn p der Parameter ist, die Gleichung

$$y^2 = \frac{16}{27} \cdot \frac{(x - \frac{1}{2}p)^3}{p},$$

oder, wenn man $x - \frac{1}{2}p = u$ setzt, die Gleichung

$$y^2 = \frac{16u^3}{27p}.$$

§. 226.

Aufgabe. Aus der Gleichung der Evolute die Gleichung der Evolvente zu finden.

Auflösung. Es ist

$$\frac{\partial x'^2 + \partial y'^2}{\partial^2 y'} = \frac{(\partial x'^2 + \partial y'^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial x' \partial^2 y'} \cdot \frac{\partial x'}{\sqrt{\partial x'^2 + \partial y'^2}},$$

d. i. in der in §. 222. eingeführten Bezeichnung

$$\frac{\partial x'^2 + \partial y'^2}{\partial^2 y'} = \frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p'} \cdot \frac{\partial x'}{\sqrt{\partial x'^2 + \partial y'^2}};$$

und folglich, weil nach §. 222.

$$\frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p'} = \theta$$

ist,

$$\frac{\partial x'^2 + \partial y'^2}{\partial^2 y'} = \frac{\theta \partial x'}{\sqrt{\partial x'^2 + \partial y'^2}}.$$

Aber nach §. 220. 16.

$$\frac{\partial x'^2 + \partial y'^2}{\partial x'^2} = \frac{\partial x^2 + \partial y^2}{\partial y^2}.$$

Folglich

$$\frac{\partial x'}{\sqrt{\partial x'^2 + \partial y'^2}} = \frac{\partial y}{\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}},$$

und daher nach dem Vorhergehenden

$$\frac{\partial x'^2 + \partial y'^2}{\partial^2 y'} = \frac{\theta \partial y}{\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}};$$

also nach §. 220. 16.

$$\frac{\partial x'^2 + \partial y'^2}{\partial^2 y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial x'} = - \frac{\theta \partial y}{\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} = - \frac{\theta \partial x}{\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}}.$$

Weil nun nach §. 224.

$$x' = x + \frac{\left\{ 1 + \left(\frac{\partial y'}{\partial x'} \right)^2 \right\} \frac{\partial y'}{\partial x'}}{\frac{\partial^2 y'}{\partial x'^2}}, \quad y' = y - \frac{1 + \left(\frac{\partial y'}{\partial x'} \right)^2}{\frac{\partial^2 y'}{\partial x'^2}},$$

oder

$$x' = x + \frac{\partial x'^2 + \partial y'^2}{\partial^2 y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial x'}, \quad y' = y - \frac{\partial x'^2 + \partial y'^2}{\partial^2 y'}.$$

ist; so ist nach dem Vorhergehenden

$$x' = x - \frac{\theta \partial x}{\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}}, \quad y' = y - \frac{\theta \partial y}{\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}};$$

oder auch, wie leicht erhellen wird,

$$x' = x - (a + s) \frac{\partial x}{\partial s}, \quad y' = y - (a + s) \frac{\partial y}{\partial s}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen und der gegebenen Gleichung der Evolute, die $\psi(x, y) = 0$ seyn mag, müsste man x, y eliminiren, um die Gleichung der Evolvente zwischen x', y' zu finden.

Vierzehntes Kapitel.

Differentialformeln für ebene und sphärische Dreiecke.

§. 227.

Die zur Bestimmung eines ebenen oder sphärischen Dreiecks gemessenen Stücke sind wegen der Unvollkommenheit der bei der Messung gebrauchten Instrumente und unserer Sinne nie ganz

von Fehlern frei; daher ist es namentlich für Geodäsie und Astronomie von grosser Wichtigkeit, den Einfluss beurtheilen zu können, welchen die Fehler in den gemessenen Stücken eines ebenen oder sphärischen Dreiecks auf die aus denselben nach Principien der Trigonometrie berechneten Stücke dieses Dreiecks ausüben.

§. 228.

Wir wollen vier beliebige Stücke eines ebenen oder sphärischen Dreiecks überhaupt durch x, y, z und u bezeichnen, und wollen annehmen, dass zwischen diesen vier Stücken die Gleichung

$$u = f(x, y, z)$$

Statt finde. Sind dann x', y', z' die durch Messung gefundenen Werthe der drei Stücke x, y, z ; so ist, wenn u' den aus diesen Werthen berechneten Werth des Stücks u bezeichnet,

$$u' = f(x', y', z').$$

Bezeichnen wir nun ferner die bei der Messung der Stücke x, y, z begangenen Fehler respective durch $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, den aus denselben resultirenden Fehler des vierten berechneten Stücks durch Δu ; so ist, wenn wir $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta u$ als positiv oder als negativ annehmen, jenachdem die Grössen x', y', z', u' , grösser oder kleiner als die Grössen x, y, z, u sind,

$$x' = x + \Delta x, \quad y' = y + \Delta y, \quad z' = z + \Delta z;$$

$$u' = u + \Delta u$$

und

$$x = x' - \Delta x, \quad y = y' - \Delta y, \quad z = z' - \Delta z,$$

$$u = u' - \Delta u;$$

folglich nach dem Obigen

$$u + \Delta u = f(x + \Delta x, \quad y + \Delta y, \quad z + \Delta z)$$

und

$$u' - \Delta u = f(x' - \Delta x, \quad y' - \Delta y, \quad z' - \Delta z);$$

also

$$\Delta u = f(x + \Delta x, \quad y + \Delta y, \quad z + \Delta z) - f(x, y, z)$$

und, wenn wir

$$-\Delta x = \Delta x', \quad -\Delta y = \Delta y', \quad -\Delta z = \Delta z', \quad -\Delta u = \Delta u'$$

setzen,

$$\Delta u' = f(x' + \Delta x', \quad y' + \Delta y', \quad z' + \Delta z') - f(x', y', z').$$

Hieraus geht hervor, dass, wenn $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ und Δu die Fehler in den gemessenen und dem berechneten Stücke, übrigens x, y, z, u die richtigen oder fehlerhaften Stücke des Dreiecks bezeichnen, immer

$$\Delta u = f(x + \Delta x, \quad y + \Delta y, \quad z + \Delta z) - f(x, y, z)$$

ist, wenn man nur wegen der Vorzeichen der Grössen Δx , Δy , Δz , Δu die folgende Regel beobachtet.

Wenn x , y , z , u die richtigen Stücke des Dreiecks bezeichnen, so sind die Grössen Δx , Δy , Δz , Δu positiv oder negativ, jenachdem die fehlerhaften Stücke grösser oder kleiner als die richtigen Stücke sind; wenn dagegen x , y , z , u die fehlerhaften Stücke des Dreiecks bezeichnen, so sind die Grössen Δx , Δy , Δz , Δu positiv oder negativ, jenachdem die fehlerhaften Stücke kleiner oder grösser als die richtigen Stücke sind. Bezeichnen also x , y , z , u die richtigen Stücke, so werden die fehlerhaften erhalten, wenn man die Grössen Δx , Δy , Δz , Δu zu den richtigen Stücken addirt; bezeichnen dagegen x , y , z , u die fehlerhaften Stücke, so werden die richtigen Stücke erhalten, wenn man die Grössen Δx , Δy , Δz , Δu zu den fehlerhaften addirt.

Δu wird nach dem Vorhergehenden in allen Fällen erhalten, wenn man, die Grössen x , y , z als von einander völlig unabhängige veränderliche Grössen betrachtend, die Differenz der Function $f(x, y, z)$ nach Principien der Differenzenrechnung entwickelt. Indess ist die Sache noch einer andern Ansicht fähig, welche wir im folgenden Paragraphen entwickeln wollen.

§. 229.

Wenn u eine Function der einen veränderlichen Grösse x ist; so ist der Differentialquotient $\frac{\partial u}{\partial x}$ bekanntlich die Gränze, welcher $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ sich nähert, wenn Δx sich der Null nähert, und es ist folglich offenbar mit desto grösserer Genauigkeit, je näher Δx der Null kommt,

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

oder

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x = \frac{\partial u}{\partial x} \partial x,$$

d. i. $\Delta u = \partial u$.

Wenn ferner $u = f(x, y, z, \dots)$ eine Function der von einander unabhängigen veränderlichen Grössen x , y , z , $\dots$ ist; so ist, wenn wir

$$F(\alpha) = f(x + \alpha \partial x, y + \alpha \partial y, z + \alpha \partial z, \dots),$$

wo ∂x , ∂y , ∂z , $\dots$, wie immer, mit Δx , Δy , Δz , $\dots$ völlig einerlei sind, setzen, nach §. 109.

$$F(\alpha) = F(0) + \alpha F'(\rho \alpha),$$

wo ρ einen positiven echten Bruch bezeichnet, oder

$f(x + \alpha \partial x, y + \alpha \partial y, z + \alpha \partial z, \dots) = f(x, y, z, \dots) + \alpha F'(\rho \alpha);$
folglich ist

$$f(x + \alpha \partial x, y + \alpha \partial y, z + \alpha \partial z, \dots) - f(x, y, z, \dots) = \alpha F'(\rho \alpha),$$

und für $\alpha = 1$

$$\Delta u = F'(\varrho).$$

Setzen wir der Kürze wegen

$$x + \alpha \partial x = x_1, \quad y + \alpha \partial y = y_1, \quad z + \alpha \partial z = z_1, \dots;$$

so ist

$$F(\alpha) = f(x_1, y_1, z_1, \dots).$$

Betrachten wir nun $x_1, y_1, z_1, \dots$ als Functionen von α ; so ist

$$\partial x_1 = \partial \alpha \partial x, \quad \partial y_1 = \partial \alpha \partial y, \quad \partial z_1 = \partial \alpha \partial z, \dots$$

Nach §. 137. ist aber, wenn immer bloss α als unabhängige veränderliche Grösse betrachtet wird,

$$\partial F(\alpha) = \frac{\partial F(\alpha)}{\partial x_1} \partial x_1 + \frac{\partial F(\alpha)}{\partial y_1} \partial y_1 + \frac{\partial F(\alpha)}{\partial z_1} \partial z_1 + \dots,$$

wo

$$\frac{\partial F(\alpha)}{\partial x_1}, \frac{\partial F(\alpha)}{\partial y_1}, \frac{\partial F(\alpha)}{\partial z_1}, \dots$$

die partiellen Differentialquotienten von $F(\alpha)$ in Bezug auf $x_1, y_1, z_1, \dots$ als veränderliche Grösse sind. Also ist nach dem Obigen

$$\partial F(\alpha) = \frac{\partial F(\alpha)}{\partial x_1} \partial x \partial \alpha + \frac{\partial F(\alpha)}{\partial y_1} \partial y \partial \alpha + \frac{\partial F(\alpha)}{\partial z_1} \partial z \partial \alpha + \dots$$

und folglich

$$\frac{\partial F(\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial F(\alpha)}{\partial x_1} \partial x + \frac{\partial F(\alpha)}{\partial y_1} \partial y + \frac{\partial F(\alpha)}{\partial z_1} \partial z + \dots$$

oder

$$F'(\alpha) = \frac{\partial F(\alpha)}{\partial x_1} \partial x + \frac{\partial F(\alpha)}{\partial y_1} \partial y + \frac{\partial F(\alpha)}{\partial z_1} \partial z + \dots$$

Ueberlegt man nun, dass

$$\partial u = \frac{\partial u}{\partial x} \partial x + \frac{\partial u}{\partial y} \partial y + \frac{\partial u}{\partial z} \partial z + \dots$$

ist, und dass $F(\alpha)$ aus u entsteht, wenn man für $x, y, z, \dots$ respective $x_1, y_1, z_1, \dots$ setzt; so erhellet auf der Stelle, dass auch $F'(\alpha)$ aus ∂u entsteht, wenn man für $x, y, z, \dots$ respective $x_1, y_1, z_1, \dots$, d. i. $x + \alpha \partial x, y + \alpha \partial y, z + \alpha \partial z, \dots$ setzt.

Folglich entsteht $F'(\varrho)$ aus ∂u , wenn man für $x, y, z, \dots$ respective $x + \varrho \partial x, y + \varrho \partial y, z + \varrho \partial z, \dots$ setzt, und man sieht nun hieraus, dass $F'(\varrho)$, weil ϱ eine positiver echter Bruch ist, dem Differential ∂u desto näher kommt, je näher $\partial x, \partial y, \partial z, \dots$ der Null kommen. Also ist wegen der Gleichung $\Delta u = F'(\varrho)$ auch in diesem Falle mit desto grösserer Genauigkeit

$$\Delta u = \partial u,$$

je näher $\partial x, \partial y, \partial z, \dots$ der Null kommen, ein Satz, welcher für alle Anwendungen der Differentialrechnung auf Gegenstände der Praxis von der grössten Wichtigkeit ist.

Da nun bei allen Messungen, welche mit guten Instrumenten und aller nur möglichen Sorgfalt von Seiten des Beobachters angestellt sind, die Fehler in den gemessenen Stücken der Null immer sehr nahe kommen werden; so wird man offenbar die Gleichung zwischen den Fehlern in den gemessenen und dem berechneten Stücke, statt durch die Differenzenrechnung, wie es eigentlich, wenn völlige Schärfe verlangt würde, erforderlich wäre, mit einem hier hinreichenden Grade der Annäherung durch die Differentialrechnung entwickeln können. Man wird also, um den Fehler des berechneten Stücks zu erhalten, nicht Δu , sondern vielmehr ∂u durch Differentiation der Function $f(x, y, z)$ entwickeln, wobei wieder x, y, z als von einander ganz unabhängige veränderliche Grössen zu betrachten sind. Diese Entwicklung, welche eine vortreffliche Uebung in der Rechnung mit partiellen Differentialen gewährt, und zugleich von grosser praktischer Wichtigkeit ist, in allen Fällen auszuführen, ist der Zweck des gegenwärtigen Kapitels.

Die richtigen oder fehlerhaften Seiten und Winkel des ebenen oder sphärischen Dreiecks werden wir nach einer aus der Trigonometrie hinreichend bekannten Bezeichnungsart im Folgenden immer respective durch a, b, c und A, B, C bezeichnen.

A. Differentialformeln für ebene Dreiecke.

§. 230.

Zunächst kommt es darauf an, die allgemeinen Fundamentalformeln der Fehlerrechnung der ebenen Trigonometrie zu finden.

Zu dem Ende differentiire man die aus der ebenen Trigonometrie bekannte Gleichung

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Dadurch erhält man

$$a\partial a = (b - c \cos A)\partial b + (c - b \cos A)\partial c + bcsin A\partial A,$$

oder, weil bekanntlich

$$a \cos C + c \cos A = b,$$

$$b \cos A + a \cos B = c$$

ist,

$$a\partial a = a \cos C \partial b + a \cos B \partial c + bcsin A \partial A.$$

Differentiirt man ferner die ebenfalls aus der ebenen Trigonometrie bekannte Gleichung

$$a \sin B = b \sin A;$$

so erhält man

$$\sin B \partial a + a \cos B \partial B = b \cos A \partial A + \sin A \partial b$$

oder

$$\sin B \partial a - \sin A \partial b = b \cos A \partial A - a \cos B \partial B.$$

Durch gehörige Vertauschung der Buchstaben in den beiden gefundenen Gleichungen erhält man nun überhaupt die folgenden Gleichungen:

$$1. \begin{cases} a \partial a = a \cos C \partial b + a \cos B \partial c + b \sin A \partial A \\ b \partial b = b \cos A \partial c + b \cos C \partial a + a \sin B \partial B \\ c \partial c = c \cos B \partial a + c \cos A \partial b + a \sin C \partial C \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \sin B \partial a - \sin A \partial b = b \cos A \partial A - a \cos B \partial B \\ \sin C \partial b - \sin B \partial c = c \cos B \partial B - b \cos C \partial C \\ \sin A \partial c - \sin C \partial a = a \cos C \partial C - c \cos A \partial A. \end{cases}$$

Nimmt man zu diesen Gleichungen die aus der Gleichung

$$A + B + C = \pi$$

sich unmittelbar ergebende Gleichung

$$3. \partial A + \partial B + \partial C = 0;$$

so hat man die Fundamentalformeln der Fehlerrechnung der ebenen Trigonometrie, die wir nun auf alle Fälle, welche vorkommen können, anwenden wollen.

§. 231.

Gegeben a, B, C . Gesucht A, b, c .

Aus 3. und 2. erhält man

$$4. \partial A = -\partial B - \partial C,$$

$$5. \partial b = \frac{\sin B \partial a - b \cos A \partial A + a \cos B \partial B}{\sin A},$$

$$6. \partial c = \frac{\sin C \partial a - c \cos A \partial A + a \cos C \partial C}{\sin A}.$$

Nach diesen Formeln berechnet man zuerst ∂A , und dann ∂b und ∂c .

Uebrigens lassen sich die zweite und dritte Formel auch unter der Form

$$\partial b = \frac{\sin B \partial a + (b \cos A + a \cos B) \partial B + b \cos A \partial C}{\sin A},$$

$$\partial c = \frac{\sin C \partial a + (c \cos A + a \cos C) \partial C + c \cos A \partial B}{\sin A};$$

oder, weil bekanntlich

$$b \cos A + a \cos B = c,$$

$$c \cos A + a \cos C = b$$

ist, unter der Form

$$7. \partial b = \frac{\sin B \partial a + c \partial B + b \cos A \partial C}{\sin A},$$

$$8. \partial c = \frac{\sin C \partial a + b \partial C + c \cos A \partial B}{\sin A}$$

darstellen.

Die Verhältnisse der Fehler ∂b , ∂c zu den Seiten b , c lassen sich auf die folgende bequeme Art darstellen.

Weil

$$\frac{\sin B}{\sin A} = \frac{b}{a}, \quad \frac{\sin C}{\sin A} = \frac{c}{a}$$

ist; so ist

$$\partial b = \frac{b \partial a}{a} + \frac{c \partial B}{\sin A} + b \cot A \partial C,$$

$$\partial c = \frac{c \partial a}{a} + \frac{b \partial C}{\sin A} + c \cot A \partial B,$$

und folglich, weil

$$c = \frac{b \sin C}{\sin B}, \quad b = \frac{c \sin B}{\sin C}$$

ist,

$$\frac{\partial b}{b} = \frac{\partial a}{a} + \frac{\sin C \partial B}{\sin A \sin B} + \cot A \partial C,$$

$$\frac{\partial c}{c} = \frac{\partial a}{a} + \frac{\sin B \partial C}{\sin A \sin C} + \cot A \partial B,$$

oder

$$9. \frac{\partial b}{b} = \frac{\partial a}{a} + \frac{\sin C \partial B}{\sin B \sin(B+C)} - \cot(B+C) \partial C,$$

$$10. \frac{\partial c}{c} = \frac{\partial a}{a} + \frac{\sin B \partial C}{\sin C \sin(B+C)} - \cot(B+C) \partial B.$$

Setzt man also der Kürze wegen

$$\frac{\sin C}{\sin B \sin(B+C)} = M, \quad \frac{\sin B}{\sin C \sin(B+C)} = M', \quad \cot(B+C) = N;$$

so ist

$$11. \frac{\partial b}{b} = \frac{\partial a}{a} + M \partial B - N \partial C,$$

$$12. \frac{\partial c}{c} = \frac{\partial a}{a} + M' \partial C - N \partial B.$$

Zu bemerken ist hierbei noch, dass in allen vorhergehenden Formeln ∂B und ∂C als in Theilen des Radius, d. i. der Einheit, ausgedrückt gedacht werden müssen. Sind dagegen ∂B und ∂C in Secunden ausgedrückt; so muss man in die vorigen Formeln

statt ∂B und ∂C respective die Grössen $\sin 1'' \partial B$ und $\sin 1'' \partial C$ einführen, wodurch dieselben folgende Gestalt erhalten:

$$13. \quad \frac{\partial b}{b} = \frac{\partial a}{a} + M \sin 1'' \partial B - N \sin 1'' \partial C,$$

$$14. \quad \frac{\partial c}{c} = \frac{\partial a}{a} + M' \sin 1'' \partial C - N \sin 1'' \partial B.$$

§. 232.

Um den Gebrauch der vorhergehenden Formeln an einem Beispiele zu erläutern, wollen wir annehmen, dass man durch Messung die Seite a und die beiden an derselben liegenden Winkel B , C eines Dreiecks respective 100 Ruthen und $30^\circ 6'$, $140^\circ 8'$ gefunden habe, dass man aber aus der Natur der gebrauchten Instrumente, aus der auf die Messung gewandten Sorgfalt, überhaupt aus den Verhältnissen und Umständen, unter denen die Messung angestellt wurde, zu schliessen berechtigt sey, dass die Seite a wohl um 2 Fuss, der Winkel B um $5'$, der Winkel C um $4'$ fehlerhaft gemessen seyn könne, und wollen nun den Einfluss zu beurtheilen suchen, welchen diese Fehler auf die Bestimmung der Seite b ausüben.

Setzen wir $a = 1000'$, $B = 30^\circ 6'$, $C = 140^\circ 8'$ und nehmen an, dass alle gemessenen Stücke zu klein sind; so müssen wir nach §. 228.

$$\partial a = 2', \quad \partial B = 300'', \quad \partial C = 240''$$

setzen. Folglich ist

$$\frac{\partial a}{a} = 0,002.$$

Ferner ist

$$\log \sin C = 0,8068602 - 1$$

$$\log \partial B = 2,4771213$$

$$\log \sin 1'' = 0,6855749 - 6$$

$$\hline 0,9695564 - 4$$

$$\log \sin B = 0,7002802 - 1$$

$$\log \sin (B + C) = 0,2295185 - 1$$

$$\hline 0,9297987 - 2$$

$$\log . M \sin 1'' \partial B = 0,0397577 - 2$$

$$M \sin 1'' \partial B = 0,0109587$$

$$\log \{-\cot (B + C)\} = 0,7641411$$

$$\log \partial C = 2,3802112$$

$$\log \sin 1'' = 0,6855749 - 6$$

$$\log (-N \sin 1'' \partial C) = 0,8299272 - 3$$

$$N \sin 1'' \partial C = - 0,0067597.$$

Folglich

$$\frac{\partial b}{b} = 0,002 + 0,0109587 + 0,0067597,$$

d. i.

$$\frac{\partial b}{b} = 0,0197184$$

oder nahe $= 0,02$. Auf 50 Ruthen würde also der Fehler schon eine ganze Ruthe betragen.

Will man ∂b selbst finden; so muss man zuerst aus a, B, C die Seite b berechnen, und muss dann den Bruch $\frac{\partial b}{b}$ mit b multipliciren. Die hierzu nöthige einfache Rechnung führt man auf folgende Art.

$$\log a = 3,0000000$$

$$\log \sin B = 0,7002802 - 1$$

$$\hline 2,7002802$$

$$\log \sin (B + C) = 0,2295185 - 1$$

$$\log b = 3,4707617$$

$$\log \frac{\partial b}{b} = 0,2948717 - 2$$

$$\log \partial b = 1,7656334$$

$$\partial b = 58',295 = 5^\circ,8295$$

Der Fehler in der Seite b ist also unter den gemachten Voraussetzungen sehr beträchtlich.

Wäre a um 2 Fuss zu gross, B um $5'$, C um $4'$ zu klein gemessen worden; so hätte man

$$\partial a = - 2', \partial B = 300'', \partial C = 240''$$

setzen müssen, und würde dann

$$\frac{\partial b}{b} = - 0,002 + 0,0109587 + 0,0067597$$

d. i.

$$\frac{\partial b}{b} = 0,0157184$$

gefunden haben.

Wäre auch B zu gross gemessen worden; so hätte man

$$\partial a = - 2', \partial B = - 300'', \partial C = 240''$$

setzen müssen, und würde dann

$$\frac{\partial b}{b} = - 0,002 - 0,0109587 + 0,0067597$$

d. i.

$$\frac{\partial b}{b} = - 0,0061990$$

gefunden haben.

Wären alle drei Stücke zu gross gemessen worden; so hätte man

$$\partial a = - 2', \quad \partial B = - 300'', \quad \partial C = - 240''$$

setzen müssen, und würde dann

$$\frac{\partial b}{b} = - 0,002 - 0,0109587 - 0,0067597$$

d. i.

$$\frac{\partial b}{b} = - 0,0197184$$

gefunden haben.

§. 233.

Gegeben b, c, A . Gesucht B, C, a .

Aus den Formeln 1. erhält man

$$15. \quad \partial a = \frac{a \cos C \partial b + a \cos B \partial c + bc \sin A \partial A}{a},$$

oder nach bekannten trigonometrischen Sätzen

$$16. \quad \partial a = \frac{(b - c \cos A) \partial b + (c - b \cos A) \partial c + bc \sin A \partial A}{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}}.$$

Ferner ist nach den Gleichungen 1.

$$17. \quad \partial B = \frac{b \partial b - b \cos A \partial c - b \cos C \partial a}{ac \sin B},$$

$$18. \quad \partial C = \frac{c \partial c - c \cos B \partial a - c \cos A \partial b}{ab \sin C}.$$

Aus der Formel 15. erhält man auch

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{a} &= \frac{b}{a} \cos C \cdot \frac{\partial b}{b} + \frac{c}{a} \cos B \cdot \frac{\partial c}{c} + \frac{bc}{a^2} \sin A \partial A \\ &= \frac{\sin B \cos C}{\sin A} \cdot \frac{\partial b}{b} + \frac{\sin C \cos B}{\sin A} \cdot \frac{\partial c}{c} + \frac{\sin B \sin C}{\sin A} \partial A, \end{aligned}$$

d. i., wenn wir

$$P = \frac{\sin B \cos C}{\sin A}, \quad Q = \frac{\sin C \cos B}{\sin A}, \quad R = \frac{\sin B \sin C}{\sin A}$$

setzen,

$$19. \quad \frac{\partial a}{a} = P \frac{\partial b}{b} + Q \frac{\partial c}{c} + R \partial A.$$

§. 234.

Gegeben b, c, B . Gesucht A, C, a .

Aus den Gleichungen 1. und 2. ergibt sich auf der Stelle:

$$20. \quad \partial a = \frac{b \partial b - b \cos A \partial c - ac \sin B \partial B}{b \cos C},$$

$$21. \partial A = \frac{\sin B \partial a - \sin A \partial b + a \cos B \partial B}{b \cos A},$$

$$22. \partial C = \frac{\sin B \partial c - \sin C \partial b + c \cos B \partial B}{b \cos C}.$$

Durch Substitution des Werths von ∂a aus 20. in 21. würde man einen von ∂a unabhängigen Ausdruck von ∂A erhalten können.

§. 235.

Gegeben a, b, c . Gesucht A, B, C .

Nach den Gleichungen 1. ist

$$\partial A = \frac{a \partial a - a \cos C \partial b - a \cos B \partial c}{bc \sin A}.$$

Substituirt man hierin die aus der Trigonometrie bekannten Ausdrücke für $\sin A, \cos B, \cos C$ durch die drei Seiten, für $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$, und vertauscht dann die Buchstaben gehörig; so erhält man

$$23. \partial A = \frac{2abc \partial a - (a^2 + b^2 - c^2) c \partial b - (a^2 + c^2 - b^2) b \partial c}{4bc \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}},$$

$$24. \partial B = \frac{2abc \partial b - (a^2 + b^2 - c^2) c \partial a - (b^2 + c^2 - a^2) a \partial c}{4ac \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}},$$

$$25. \partial C = \frac{2abc \partial c - (a^2 + c^2 - b^2) b \partial a - (b^2 + c^2 - a^2) a \partial b}{4ab \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}.$$

§. 236.

Wichtig sind auch die Gleichungen, welche man aus den Fundamentalformeln 1. und 2. erhält, wenn man zwei Stücke des Dreiecks als richtig bestimmt annimmt. Man kann aber als richtig bestimmt annehmen:

1. Eine Seite und einen anliegenden Winkel.
2. Eine Seite und ihren Gegenwinkel.
3. Zwei Seiten.
4. Zwei Winkel.

Diese vier Fälle wollen wir nun nach der Reihe durchgehen.

§. 237.

Richtig bestimmt a, B .

Nach der Annahme ist $\partial a = \partial B = 0$. Weil nun nach 3.

$$\partial A + \partial B + \partial C = 0$$

ist; so ist in diesem Falle

$$\partial A + \partial C = 0, \quad \partial A = -\partial C.$$

Aus den Gleichungen 1. und 2. erhält man ferner für $\partial a = \partial B = 0$

$$\begin{aligned} b\partial b &= b\cos A\partial c, \\ -\sin A\partial b &= b\cos A\partial A. \end{aligned}$$

Folglich hat man zwischen ∂b , ∂c , ∂A , ∂C die drei Gleichungen

$$26. \quad \begin{cases} \partial A = -\partial C \\ \partial b = \cos A\partial c \\ b\partial A = -\tan A\partial b \end{cases}$$

mittelt welcher, wenn irgend eine der vier Grössen ∂b , ∂c , ∂A , ∂C bekannt ist, jederzeit die drei übrigen leicht gefunden werden können.

§. 238.

Richtig bestimmt a , A .

In diesem Falle ist $\partial a = \partial A = 0$. Weil nun nach 3.

$$\partial A + \partial B + \partial C = 0$$

ist; so ist in diesem Falle

$$\partial B + \partial C = 0, \quad \partial B = -\partial C.$$

Aus den Gleichungen 1. und 2. erhält man für $\partial a = \partial A = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= a\cos C\partial b + a\cos B\partial c, \\ -\sin A\partial b &= -a\cos B\partial B. \end{aligned}$$

Folglich hat man zwischen ∂b , ∂c , ∂B , ∂C die drei folgenden Gleichungen:

$$27. \quad \begin{cases} \partial B = -\partial C \\ \cos B\partial c = -\cos C\partial b \\ a\cos B\partial B = \sin A\partial b, \end{cases}$$

mittelt welcher, wenn eine der vier genannten Grössen gegeben ist, die drei andern jederzeit gefunden werden können.

Die letzte dieser vier Gleichungen lässt sich, weil

$$\sin A = \frac{a}{b} \sin B$$

ist, auch unter folgender Form darstellen:

$$28. \quad b\partial B = \tan B\partial b.$$

§. 239.

Richtig bestimmt a, b .

In diesem Falle ist $\partial a = \partial b = 0$. Also ist nach 1., 2. und 3.

$$\begin{aligned}\partial A + \partial B + \partial C &= 0, \\ 0 &= a \cos B \partial c + b c \sin A \partial A, \\ 0 &= b \cos A \partial c + a c \sin B \partial B, \\ c \partial c &= a b \sin C \partial C, \\ 0 &= b \cos A \partial A - a \cos B \partial B;\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}- b c \sin A \partial A &= a \cos B \partial c, \\ - a c \sin B \partial B &= b \cos A \partial c, \\ c \partial c &= a b \sin C \partial C, \\ a \cos B \partial B &= b \cos A \partial A.\end{aligned}$$

Diese Gleichungen lassen sich aber abkürzen. Es ist nämlich, wenn man in der ersten Gleichung auf beiden Seiten mit $\sin B$ multiplicirt, und dann mit $\cos B$ dividirt,

$$- b c \sin A \tan B \partial A = a \sin B \partial c.$$

Aber bekanntlich

$$b \sin A = a \sin B.$$

Also durch Division

$$- c \tan B \partial A = \partial c,$$

und ganz eben so

$$- c \tan A \partial B = \partial c.$$

Ferner ist aus der dritten der vier obigen Gleichungen

$$\partial c = a \cdot \frac{b \sin C}{c} \partial C = b \cdot \frac{a \sin C}{c} \partial C = a \sin B \partial C = b \sin A \partial C,$$

und endlich aus der vierten Gleichung

$$a \sin A \sin B \cos B \partial B = b \sin A \sin B \cos A \partial A,$$

$$a \sin B \tan A \partial B = b \sin A \tan B \partial A,$$

$$\tan A \partial B = \tan B \partial A.$$

Also hat man jetzt folgende Gleichungen:

$$29. \left\{ \begin{aligned}\partial A + \partial B + \partial C &= 0, \\ - c \tan B \partial A &= \partial c, \\ - c \tan A \partial B &= \partial c, \\ \partial c &= a \sin B \partial C = b \sin A \partial C, \\ \tan A \partial B &= \tan B \partial A.\end{aligned}\right.$$

§. 240.

Richtig bestimmt A, B .

In diesem Falle ist $\partial A = \partial B = 0$, folglich wegen der Gleichung 3. auch $\partial C = 0$, und daher nach 1. und 2.

$$30. \begin{cases} \partial a = \cos C \partial b + \cos B \partial c, \\ \partial b = \cos A \partial c + \cos C \partial a, \\ \partial c = \cos B \partial a + \cos A \partial b; \end{cases}$$

$$\sin B \partial a - \sin A \partial b = 0,$$

$$\sin C \partial b - \sin B \partial c = 0,$$

$$\sin A \partial c - \sin C \partial a = 0;$$

$$\frac{\partial a}{\partial b} = \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b},$$

$$\frac{\partial b}{\partial c} = \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{b}{c},$$

$$\frac{\partial c}{\partial a} = \frac{\sin C}{\sin A} = \frac{c}{a};$$

$$31. b \partial a = a \partial b, c \partial b = b \partial c, a \partial c = c \partial a.$$

B. Differentialformeln für sphärische Dreiecke.

§. 241.

Zunächst kommt es hier wieder auf die Differentiation der Fundamentalformeln der sphärischen Trigonometrie:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

$$\sin A \sin b = \sin B \sin a,$$

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$

an.

Die erste giebt durch partielle Differentiation

$$\begin{aligned} \sin a \partial a &= (\sin b \cos c - \cos b \sin c \cos A) \partial b \\ &+ (\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A) \partial c \\ &+ \sin b \sin c \sin A \partial A. \end{aligned}$$

Daher

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

ist; so ist der in ∂b multiplicirte Factor

$$\begin{aligned} &= \frac{\sin b^2 \cos c - \cos a \cos b + \cos b^2 \cos c}{\sin b} \\ &= \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin b} = \sin a \cos C \end{aligned}$$

und ganz eben so ist der in ∂c multiplicirte Factor $= \sin a \cos B$.

Da nun auch

$$\frac{\sin b \sin A}{\sin a} = \sin B$$

ist; so erhält man, wenn man zugleich die Buchstaben gehörig vertauscht:

$$1. \begin{cases} \partial a = \cos C \partial b + \cos B \partial c + \sin c \sin B \partial A, \\ \partial b = \cos A \partial c + \cos C \partial a + \sin a \sin C \partial B, \\ \partial c = \cos B \partial a + \cos A \partial b + \sin b \sin A \partial C. \end{cases}$$

Aus der zweiten Fundamentalgleichung der sphärischen Trigonometrie erhält man augenblicklich durch Differentiation:

$$2. \begin{cases} \sin A \cos b \partial b + \cos A \sin b \partial A = \sin B \cos a \partial a + \cos B \sin a \partial B, \\ \sin B \cos c \partial c + \cos B \sin c \partial B = \sin C \cos b \partial b + \cos C \sin b \partial C, \\ \sin C \cos a \partial a + \cos C \sin a \partial C = \sin A \cos c \partial c + \cos A \sin c \partial A. \end{cases}$$

Aus der dritten Fundamentalgleichung der sphärischen Trigonometrie ergibt sich durch Differentiation

$$\begin{aligned} -\sin A \partial A &= (\cos a \cos B \sin C + \sin B \cos C) \partial B \\ &\quad + (\cos a \sin B \cos C + \cos B \sin C) \partial C \\ &\quad - \sin a \sin B \sin C \partial a, \end{aligned}$$

woraus, wegen

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}, \quad \frac{\sin a \sin B}{\sin A} = \sin b,$$

ganz wie oben erhalten wird:

$$3. \begin{cases} -\partial A = \cos c \partial B + \cos b \partial C - \sin b \sin C \partial a, \\ -\partial B = \cos a \partial C + \cos c \partial A - \sin c \sin A \partial b, \\ -\partial C = \cos b \partial A + \cos a \partial B - \sin a \sin B \partial c. \end{cases}$$

§. 242.

Gegeben a, b, c . Gesucht A, B, C .

Nimmt man an, dass A, B, C aus a, b, c berechnet sind; so ist nach 1.

$$4. \begin{cases} \partial A = \frac{\partial a - \cos C \partial b - \cos B \partial c}{\sin c \sin B}, \\ \partial B = \frac{\partial b - \cos A \partial c - \cos C \partial a}{\sin a \sin C}, \\ \partial C = \frac{\partial c - \cos B \partial a - \cos A \partial b}{\sin b \sin A}. \end{cases}$$

Setzt man nun statt der trigonometrischen Functionen der Winkel ihre aus der sphärischen Trigonometrie bekannten Ausdrücke durch die Seiten; so erhält man für

$$(\cos a - \cos b \cos c) \sin a = \mathfrak{A},$$

$$(\cos b - \cos c \cos a) \sin b = \mathfrak{B},$$

$$(\cos c - \cos a \cos b) \sin c = \mathfrak{C}$$

und $\frac{1}{2}(a + b + c) = s$ leicht

$$5. \quad \begin{cases} \partial A = \frac{\sin a \sin b \sin c \partial a - \mathfrak{C} \partial b - \mathfrak{B} \partial c}{2 \sin b \sin c \sqrt{\sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}} \\ \partial B = \frac{\sin a \sin b \sin c \partial b - \mathfrak{A} \partial c - \mathfrak{C} \partial a}{2 \sin a \sin c \sqrt{\sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}}, \\ \partial C = \frac{\sin a \sin b \sin c \partial c - \mathfrak{B} \partial a - \mathfrak{A} \partial b}{2 \sin a \sin b \sqrt{\sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}}. \end{cases}$$

§. 243.

Gegeben b, c, A . Gesucht B, C, a .

Nach 1. ist

$$6. \quad \partial a = \cos C \partial b + \cos B \partial c + \sin c \sin B \partial A.$$

Ferner ist nach 1.

$$\begin{aligned} \partial B &= \frac{\partial b - \cos A \partial c - \cos C \partial a}{\sin a \sin C} \\ &= \frac{\partial b - \cos A \partial c - \cos C \partial a}{\sin c \sin A}. \end{aligned}$$

Setzt man hierin für ∂a seinen Werth aus 6. und vertauscht dann die Buchstaben gehörig; so erhält man

$$7. \quad \begin{cases} \partial B = \frac{\sin C^2 \partial b - \cos a \sin B \sin C \partial c - \sin c \sin B \cos C \partial A}{\sin c \sin A}, \\ \partial C = \frac{\sin B^2 \partial c - \cos a \sin B \sin C \partial b - \sin b \cos B \sin C \partial A}{\sin b \sin A}. \end{cases}$$

§. 244.

Gegeben a, B, C . Gesucht A, b, c .

Nach 3. ist

$$8. \quad \partial A = \sin b \sin C \partial a - \cos c \partial B - \cos b \partial C.$$

Ferner ist nach 3.

$$\begin{aligned} \partial b &= \frac{\partial B + \cos a \partial C + \cos c \partial A}{\sin c \sin A} \\ &= \frac{\partial B + \cos a \partial C + \cos c \partial A}{\sin a \sin C}. \end{aligned}$$

Folglich erhält man nach einem ganz ähnlichen Verfahren wie im vorigen Paragraphen

$$9. \quad \begin{cases} \partial b = \frac{\sin c^2 \partial B + \sin b \sin c \cos A \partial C + \sin b \cos c \sin C \partial a}{\sin a \sin C}, \\ \partial c = \frac{\sin b^2 \partial C + \sin b \sin c \cos A \partial B + \cos b \sin c \sin B \partial a}{\sin a \sin B}. \end{cases}$$

§. 245.

Gegeben A, B, C . Gesucht a, b, c .

Nach 3. ist

$$10. \quad \begin{cases} \partial a = \frac{\partial A + \cos c \partial B + \cos b \partial C}{\sin b \sin C}, \\ \partial b = \frac{\partial B + \cos a \partial C + \cos c \partial A}{\sin c \sin A}, \\ \partial c = \frac{\partial C + \cos b \partial A + \cos a \partial B}{\sin a \sin B}. \end{cases}$$

Setzt man nun für die trigonometrischen Functionen der Seiten ihre bekannten Ausdrücke durch die Winkel; so erhält man für

$$(\cos A + \cos B \cos C) \sin A = \mathcal{X}',$$

$$(\cos B + \cos C \cos A) \sin B = \mathcal{B}',$$

$$(\cos C + \cos A \cos B) \sin C = \mathcal{C}'$$

und $\frac{1}{2}(A + B + C) = S$ leicht:

$$11. \quad \begin{cases} \partial a = \frac{\sin A \sin B \sin C \partial A + \mathcal{C}' \partial B + \mathcal{B}' \partial C}{2 \sin B \sin C \sqrt{-\cos S \cos(S-A) \cos(S-B) \cos(S-C)}}, \\ \partial b = \frac{\sin A \sin B \sin C \partial B + \mathcal{X}' \partial C + \mathcal{C}' \partial A}{2 \sin A \sin C \sqrt{-\cos S \cos(S-A) \cos(S-B) \cos(S-C)}}, \\ \partial c = \frac{\sin A \sin B \sin C \partial C + \mathcal{B}' \partial A + \mathcal{X}' \partial B}{2 \sin A \sin B \sqrt{-\cos S \cos(S-A) \cos(S-B) \cos(S-C)}}. \end{cases}$$

§. 246.

Gegeben a, b, A . Gesucht B, c, C .

Nach 2. und 1. ist

$$12. \quad \begin{cases} \partial B = \frac{\sin A \cos b \partial b + \cos A \sin b \partial A - \sin B \cos a \partial a}{\cos B \sin a}, \\ \partial c = \frac{\partial a - \cos C \partial b - \sin c \sin B \partial A}{\cos B}, \\ \partial C = \frac{\partial c - \cos B \partial a - \cos A \partial b}{\sin b \sin A}. \end{cases}$$

§. 247.

Gegeben a, A, B . Gesucht b, C, c .

Nach 2. und 3. ist

$$13. \left\{ \begin{array}{l} \partial b = \frac{\sin B \cos a \partial a + \cos B \sin a \partial B - \cos A \sin b \partial A}{\sin A \cos b}, \\ \partial C = \frac{-\partial A - \cos c \partial B + \sin b \sin C \partial a}{\cos b}, \\ \partial c = \frac{\partial C + \cos b \partial A + \cos a \partial B}{\sin a \sin B}. \end{array} \right.$$

§. 248.

Richtig bestimmt a, B .

Für $\partial a = \partial B = 0$ geben die Fundamentalgleichungen

$$\partial b = \cos A \partial c,$$

$$\sin A \cos b \partial b + \cos A \sin b \partial A = 0,$$

$$-\partial A = \cos b \partial C.$$

Dividirt man die zweite dieser drei Gleichungen durch $\cos A \cos b$; so erhält man

$$14. \left\{ \begin{array}{l} \partial b = \cos A \partial c, \\ \text{tang } A \partial b = -\text{tang } b \partial A, \\ -\partial A = \cos b \partial C \end{array} \right.$$

Mittelst dieser Gleichungen lassen sich, wenn eine der drei Grössen $\partial b, \partial c, \partial A, \partial C$ gegeben ist, jederzeit die drei andern finden.

§. 249.

Richtig bestimmt a, A .

Für $\partial a = \partial A = 0$ geben die Fundamentalgleichungen

$$0 = \cos C \partial b + \cos B \partial c,$$

$$\sin A \cos b \partial b = \cos B \sin a \partial B,$$

$$0 = \cos c \partial B + \cos b \partial C.$$

Da die zweite sich auch unter der Form

$$\cos b \partial b = \frac{\cos B \sin a}{\sin A} \partial B = \frac{\cos B \sin b}{\sin B} \partial B$$

schreiben lässt; so werden diese Gleichungen

$$15. \left\{ \begin{array}{l} \cos B \partial c = -\cos C \partial b, \\ \text{tang } B \partial b = \text{tang } b \partial B, \\ \cos c \partial B = -\cos b \partial C. \end{array} \right.$$

§. 250.

Richtig bestimmt a, b .Für $\partial a = \partial b = 0$ geben die Fundamentalgleichungen 1. und 2.

$$0 = \cos B \partial c + \sin c \sin B \partial A,$$

$$0 = \cos A \partial c + \sin a \sin C \partial B,$$

$$\partial c = \sin b \sin A \partial C,$$

$$\cos A \sin b \partial A = \cos B \sin a \partial B;$$

oder

$$0 = \partial c + \sin c \operatorname{tang} B \partial A,$$

$$0 = \partial c + \sin c \operatorname{tang} A \partial B,$$

$$\partial c = \sin b \sin A \partial C,$$

$$\cos A \partial A = \cos B \frac{\sin a}{\sin b} \partial B = \sin A \cot B \partial B;$$

also

$$16. \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial c = - \sin c \operatorname{tang} B \partial A, \\ \partial c = - \sin c \operatorname{tang} A \partial B, \\ \partial c = \sin b \sin A \partial C, \\ \cot A \partial A = \cot B \partial B. \end{array} \right.$$

§. 251.

Richtig bestimmt A, B .Für $\partial A = \partial B = 0$ geben die Fundamentalgleichungen 2. und 3.

$$\sin A \cos b \partial b = \sin B \cos a \partial a,$$

$$0 = \cos b \partial C - \sin b \sin C \partial a,$$

$$0 = \cos a \partial C - \sin c \sin A \partial b,$$

$$\partial C = \sin a \sin B \partial c;$$

oder

$$\frac{\sin A}{\sin B} \cos b \partial b = \frac{\sin a}{\sin b} \cos b \partial b = \cos a \partial a$$

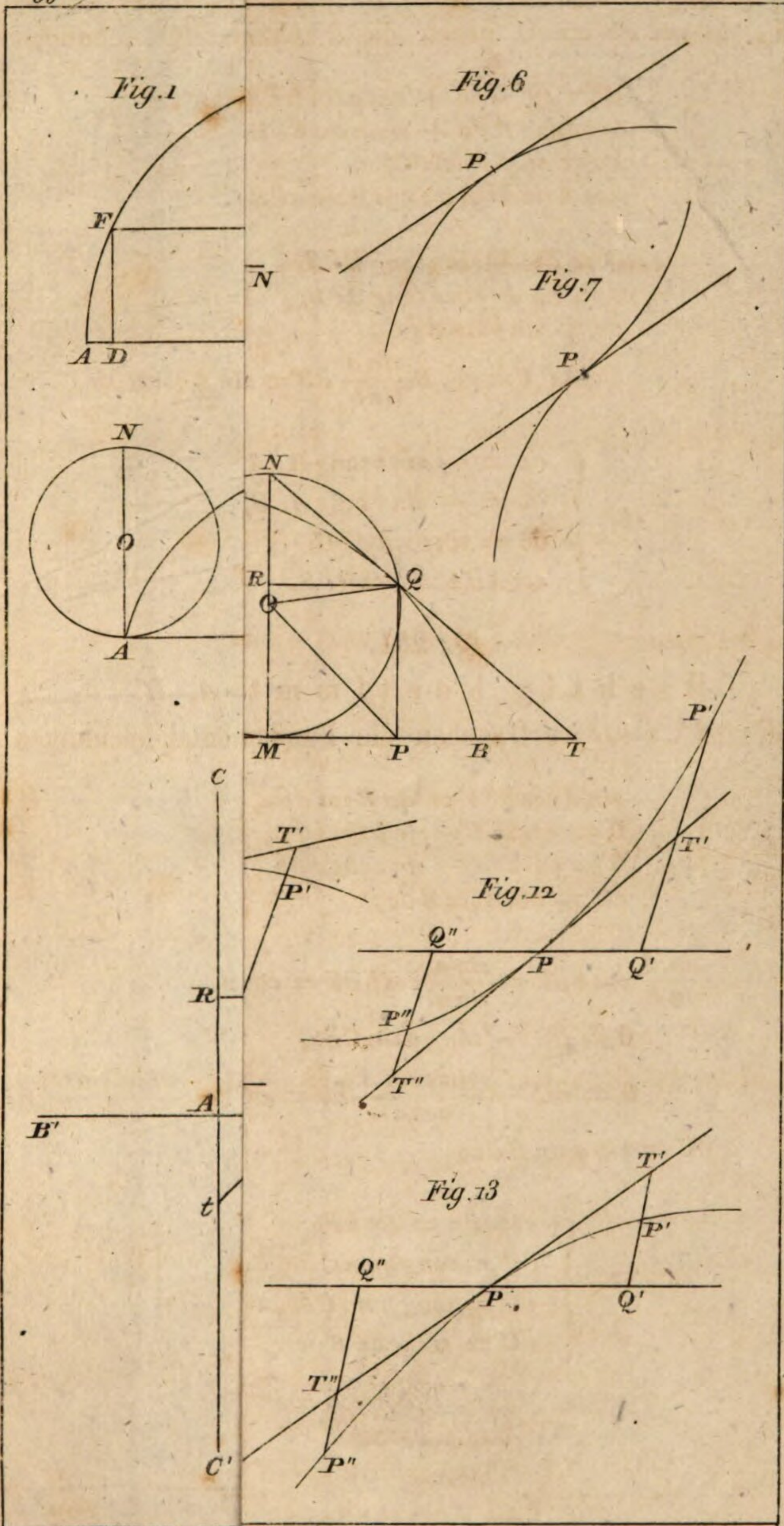
$$0 = \partial C - \operatorname{tang} b \sin C \partial a,$$

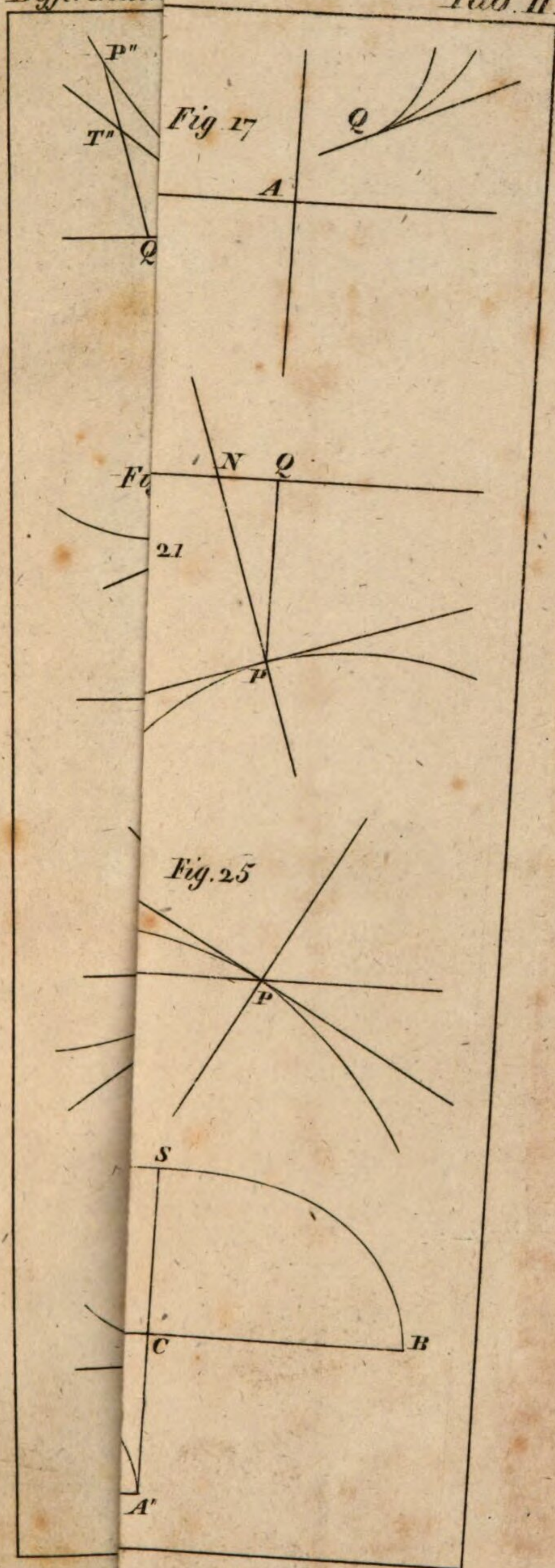
$$0 = \partial C - \frac{\sin c \sin A}{\cos a} \partial b = \partial C - \frac{\sin a \sin C}{\cos a} \partial b,$$

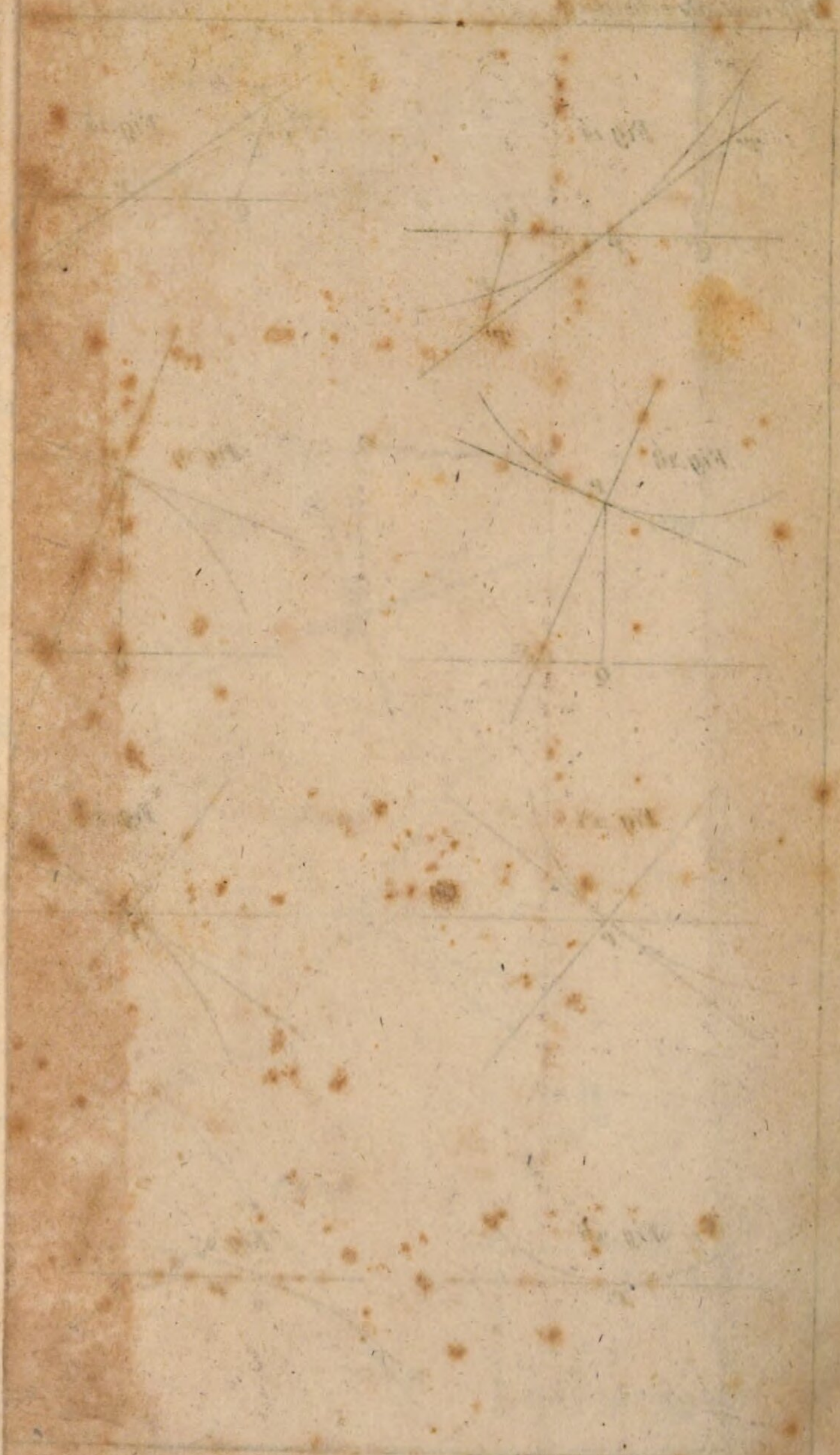
$$\partial C = \sin a \sin B \partial c;$$

also

$$17. \quad \left\{ \begin{array}{l} \cot a \partial a = \cot b \partial b, \\ \partial C = \operatorname{tang} b \sin C \partial a, \\ \partial C = \operatorname{tang} a \sin C \partial b, \\ \partial C = \sin a \sin B \partial c. \end{array} \right.$$







$$\frac{(a^{-x}-1)a^{2x}}{-1a^{2x}} = \frac{a^x - a^{2x}}{-a^{2x}} = \frac{a^{-x}-1}{-x} \times \frac{x}{a^x-1}$$

$$\frac{d^x(1-a^x)}{dx}$$

$$-a^x$$

$$\frac{-1+a^x}{a^x}$$

$$\frac{a^{2x}-a^x}{a^{2x}-a^x} = \frac{a^x}{(a^x-1)a^x}$$

$$\frac{a^x-1}{x} = \frac{a^{-x}-1}{-x}$$

$$\frac{a^x-1}{x} = \frac{a^x-1}{x} \times \frac{a^x}{a^{2x}}$$

$$1 - \frac{a^x-1}{a^x}$$

$$\frac{a^x-1}{x} = \frac{a^{-x}-1}{-x}$$

$$\frac{a^{2x}-1}{a} = \frac{(a^{-x}-1)}{-x}$$

$$\frac{a^x-1}{x} = \frac{a^{-x}-1}{-x}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$\frac{a^x-1}{x} \left(1 - \frac{(a^x-1)x}{(a^x-1)x} \right)$$

$$\frac{a^x-1}{x} \left(1 - \frac{\frac{1}{a^x}-1}{a^x-1} \right)$$

$$\frac{a^x-1}{x} \left(1 - \frac{1-a^x}{(1-a^x)a^x} \right)$$

$$\frac{a^x-1}{x} \left(1 - \frac{1-a^x}{(1-a^x)a^x} \right)$$

Grunert, Johann August,

Elemente der Differential- und Integralrechnung zum Gebrauche bei
Vorlesungen

Bd.: erster Theil

Leipzig 1837

Math.p. 190 Im-1

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081869-9